СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

СТЕПЕНИ

1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

КОРНИ

1	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
2	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3	$(\sqrt{a})^2 = a$
4	$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$
5	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ЛОГАРИФМЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$a^{\log_a b} = b$

ОДЗ ЛОГАРИФМА

Для $\log_a b$ $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1	$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$
2	$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ФСУ

РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

КВАДРАТ РАЗНОСТИ

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

КВАДРАТ СУММЫ

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

РАЗНОСТЬ КУБОВ

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

СУММА КУБОВ

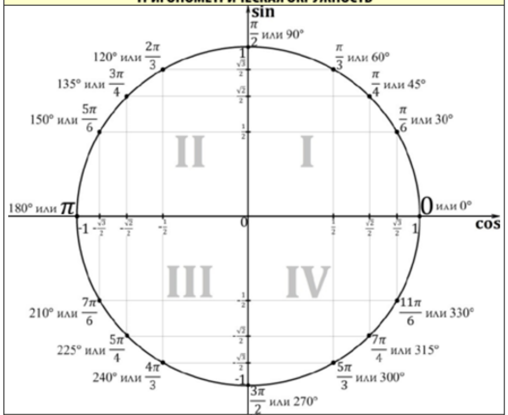
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1. Если в аргументе есть $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ или $\frac{5\pi}{2}$ и т.д., то функция меняется на кофункцию. Если в аргументе есть π или 2π или 3π и т.д., то функция не меняется на кофункцию.
   Пример:
   $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
   $\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\, \alpha$
2. Чтобы определить знак, необходимо понять в какой четверти находится аргумент и смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся.
   Пример:
   $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$
   Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому
   $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2	$1 + \mathrm{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
3	$1 + \mathrm{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
4	$\mathrm{tg}\, \alpha \cdot \mathrm{ctg}\, \alpha = 1$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
2	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
3	$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
4	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1	$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$
2	$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$
3	$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ

Было	Стало
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f \rvert - \lvert g \rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

МОДУЛЬ

РАСКРЫТИЕ МОДУЛЯ

1. Если внутримодульное выражение положительное, то просто опускаем модуль
   Пример:
   $y = \lvert 2 - 1 \rvert = 2 - 1$
2. Если внутримодульное выражение отрицательное, то раскрываем модуль, меняя все знаки внутри модуля на противоположные
   Пример:
   $y = \lvert 1 - 2 \rvert = -1 + 2$

СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

1	$\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$
2	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$

СИНУС

$\sin \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

КОСИНУС

$\cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

ТАНГЕНС

1	$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$
2	$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

КОТАНГЕНС

1	$\mathrm{ctg}\, \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$
2	$\mathrm{ctg}\, \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

ЧЁТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1	$\sin(-x) = -\sin x$
2	$\cos(-x) = \cos x$
3	$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$
4	$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ

1	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
2	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
3	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
4	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

СВОЙСТВО ОСТРЫХ УГЛОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

$\sin A = \cos B$
$\sin B = \cos A$
$\mathrm{tg}\, A = \mathrm{ctg}\, B$
$\mathrm{tg}\, B = \mathrm{ctg}\, A$

УРАВНЕНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ТЕОРЕМА ВИЕТА

$ax^2 + bx + c = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 11

УРАВНЕНИЕ ПУТИ

$S = v \cdot t$

расстояние = скорость · время

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

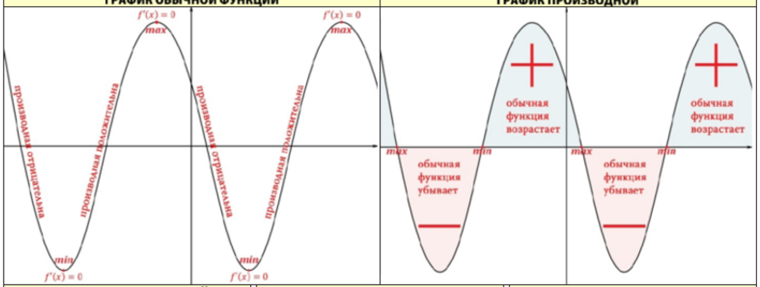
$V_{\text{средняя}} = \frac{S_{\text{суммарное}}}{t_{\text{суммарное}}}$

СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_3 \cdot m_3$

ЗАДАНИЕ 7

ГРАФИК ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ / ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$f'(x_0) = k = \mathrm{tg}\, \alpha$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$S'(t) = V(t)$
$V'(t) = a(t)$

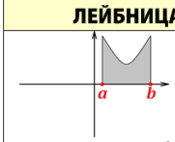
ПЕРВООБРАЗНАЯ

$F'(x) = f(x)$

УСЛОВИЕ КАСАНИЯ ФУНКЦИИ И ПРЯМОЙ

$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА



$S_{\text{фигуры под графиком}} = F(b) - F(a)$

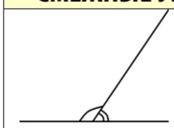
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

$y = k_1 x + b_1$
$y = k_2 x + b_2$

1. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают
   Пример:
   $y = 2x + 7$ и $y = 2x + 7$
2. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны
   Пример:
   $y = 2x + 7$ и $y = 2x - 5$
3. Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются
   Пример:
   $y = 2x + 7$ и $y = 3x + 7$

УГЛЫ

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

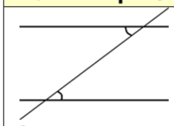


В сумме 180°

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

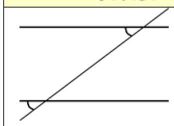
Равны

НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ



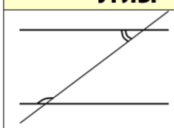
Равны при параллельных прямых (первый признак параллельности прямых)

СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ



Равны при параллельных прямых (второй признак параллельности прямых)

ОДНОСТОРОННИЕ УГЛЫ



В сумме 180° при параллельных прямых (третий признак параллельности прямых)

СУММА УГЛОВ

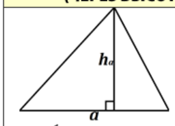
У треугольника 180°
У четырёхугольника 360°
У пятиугольника 540°
У шестиугольника 720°
У n –угольника $180°(n-2)$

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ТУПЫХ УГЛОВ

$\sin \alpha = \sin \beta$
$\cos \alpha = -\cos \beta$
$\mathrm{tg}\, \alpha = -\mathrm{tg}\, \beta$
$\mathrm{ctg}\, \alpha = -\mathrm{ctg}\, \beta$

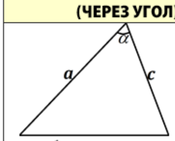
ТРЕУГОЛЬНИК

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (ЧЕРЕЗ ВЫСОТУ)



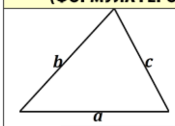
$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (ЧЕРЕЗ УГОЛ)



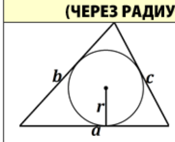
$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \alpha$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (ФОРМУЛА ГЕРОНА)



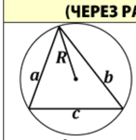
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (ЧЕРЕЗ РАДИУС)



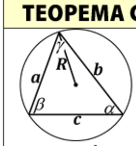
$S = pr$
p – полупериметр

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (ЧЕРЕЗ РАДИУС)



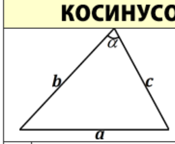
$S = \frac{abc}{4R}$

ТЕОРЕМА СИНУСОВ



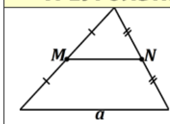
$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



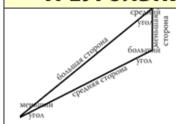
1	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
2	$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

СВОЙСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

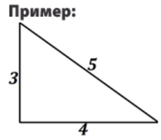


В любом треугольнике:
– против большей стороны лежит больший угол
– против средней стороны лежит средний угол
– против меньшей стороны лежит меньший угол

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

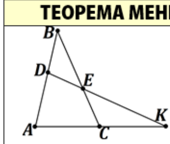
В любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны

Пример:



$3 + 4 > 5$
$3 + 5 > 4$
$4 + 5 > 3$

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ



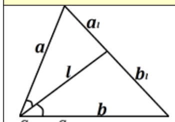
Дан $\Delta\, ABC$
Пусть прямая DE пересекает две стороны этого треугольника и продолжения третьей стороны в точке K, тогда

$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$

1) вершина A
2) точка D
3) вершина B
4) точка E
5) вершина C
6) точка K
7) вершина A

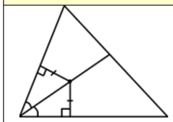
БИССЕКТРИСА

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ



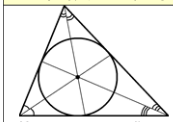
$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ



Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла

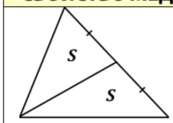
ЦЕНТР ВПИСАННОЙ В ТРЕУГОЛЬНИК ОКРУЖНОСТИ



Центр вписанной в треугольник окружности – это точка пересечения биссектрис

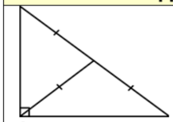
МЕДИАНА

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



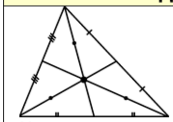
Медиана разбивает треугольник на два равновеликих (с одинаковыми площадями)

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



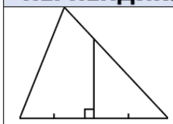
В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины

СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

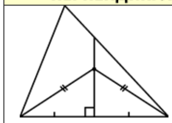


Серединный перпендикуляр – это прямая, выходящая из середины стороны треугольника под прямым углом к этой стороне

СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника

СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА



Точка, лежащая на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалена от концов этого отрезка

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА

1	По двум сторонам и углу между ними
2	По стороне и двум, прилежащим к ней углам
3	По трём сторонам

ПОДОБИЕ

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ

1	По двум углам
2	По двум пропорциональным сторонам и углу между ними
3	По трём пропорциональным сторонам

ОТНОШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

В подобных треугольниках отношение периметров, биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров равно коэффициенту подобия

ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия

$\frac{S_{\text{большого треугольника}}}{S_{\text{маленького треугольника}}} = k^2$

ОТНОШЕНИЕ ОБЪЁМОВ

Отношение объёмов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия

$\frac{V_{\text{большой фигуры}}}{V_{\text{маленькой фигуры}}} = k^3$

ПОДОБИЕ ABC и HBK

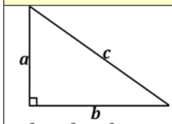
$\cos B = \frac{BK}{AB}$

$\cos B = \frac{BH}{BC}$

$\Delta ABC \sim \Delta HBK$ по 2 признаку $\left(\frac{BK}{AB} = \frac{BH}{BC} \text{ и угол } B - \text{общий}\right)$

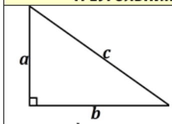
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



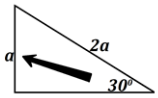
$c^2 = a^2 + b^2$

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



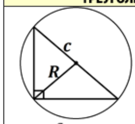
$S = \frac{a \cdot b}{2}$

СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



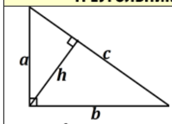
Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы

РАДИУС ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННОЙ ОКОЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



$R = \frac{c}{2}$

ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



$h = \frac{ab}{c}$

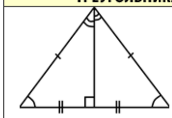
ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

$h^2 = de$

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны и углы при основании равны

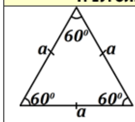
СВОЙСТВО РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

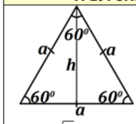
РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ПЛОЩАДЬ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА



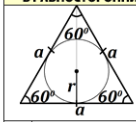
$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

ВЫСОТА РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА



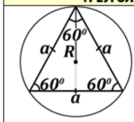
$h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

РАДИУС ОКРУЖНОСТИ, ВПИСАННОЙ В РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



1	$r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6}$
2	$r = \frac{1}{3} \cdot h$

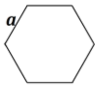
РАДИУС ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННОЙ ОКОЛО РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА



1	$R = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}$
2	$R = \frac{2}{3} \cdot h$

РАВНОСТОРОННИЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

ПЛОЩАДЬ РАВНОСТОРОННЕГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА



$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

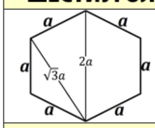
РАДИУС ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННОЙ ОКОЛО РАВНОСТОРОННЕГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА

$R = a$

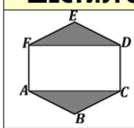
РАДИУС ОКРУЖНОСТИ, ВПИСАННОЙ В РАВНОСТОРОННИЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

$r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

ДИАГОНАЛИ РАВНОСТОРОННЕГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА



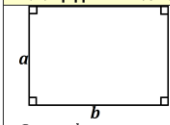
ПЛОЩАДИ ЧАСТЕЙ РАВНОСТОРОННЕГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА



1	$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
2	$S_{ABC} = \frac{1}{6} S_{\text{шестиугольника}}$
3	$S_{ACDF} = \sqrt{3}a^2$
4	$S_{ACDF} = \frac{2}{3} S_{\text{шестиугольника}}$

ПРЯМОУГОЛЬНИК

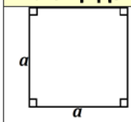
ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



$S = a \cdot b$

КВАДРАТ

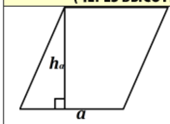
ПЛОЩАДЬ КВАДРАТА



$S = a^2$

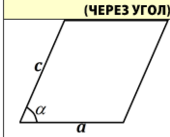
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА (ЧЕРЕЗ ВЫСОТУ)



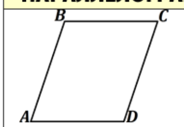
$S = ah_a$

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА (ЧЕРЕЗ УГОЛ)



$S = ac \cdot \sin \alpha$

СВОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА



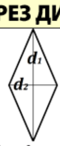
В параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1	Если две стороны равны и параллельны
2	Если противоположные углы попарно равны
3	Если противоположные стороны попарно равны
4	Если все противоположные стороны попарно параллельны
5	Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам

РОМБ

ПЛОЩАДЬ РОМБА (ЧЕРЕЗ ДИАГОНАЛИ)



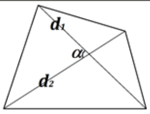
$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

ПЛОЩАДЬ РОМБА (ЧЕРЕЗ РАДИУС)

$S = 2ar$

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК

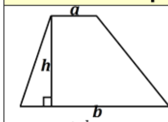
ПЛОЩАДЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА



$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha}{2}$

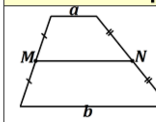
ТРАПЕЦИЯ

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ



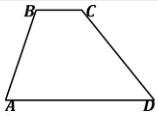
$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ



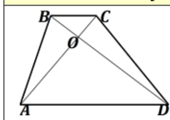
- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основаниям
- Равна полусумме оснований

СВОЙСТВО ТРАПЕЦИИ



В трапеции сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°

СВОЙСТВО ТРАПЕЦИИ



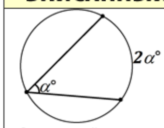
1	$S_{AOB} = S_{COD}$ (доказывается через равенство площадей треугольников ABD и ACD)
2	$\Delta BOC \sim \Delta AOD$ (по двум углам)

ПРИЗНАК РАВНОБЕДРЕННОЙ ТРАПЕЦИИ

Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

ОКРУЖНОСТЬ

ВПИСАННЫЙ УГОЛ



Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ

Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается

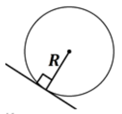
ПЛОЩАДЬ КРУГА

$S = \pi R^2$

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

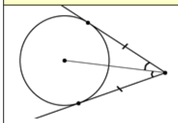
$C = 2\pi R$

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ



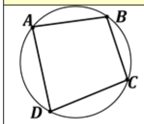
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ



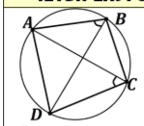
Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА



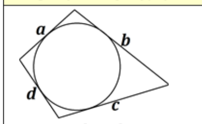
$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА



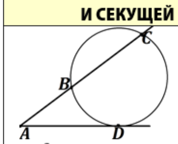
Если два равных угла опираются на один отрезок, то около четырёхугольника можно описать окружность

ПРИЗНАК ОПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА



$a + c = b + d$

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ И СЕКУЩЕЙ

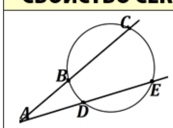


$AD^2 = AB \cdot AC$

УГОЛ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ

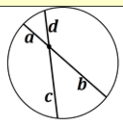
$\alpha = \frac{\smile AB}{2}$

СВОЙСТВО СЕКУЩИХ



$AD \cdot AE = AB \cdot AC$

СВОЙСТВО ХОРД

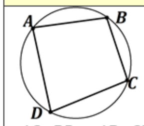


$a \cdot b = c \cdot d$

СВОЙСТВО ХОРД

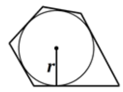
Хорды, стягивающие равные дуги, равны

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ



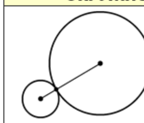
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$
(работает только для вписанного четырёхугольника)

МНОГОУГОЛЬНИК



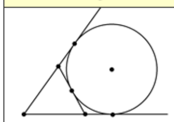
$S = pr$
p – полупериметр

СВОЙСТВО КАСАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ



Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания

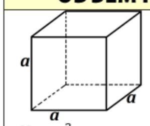
ВНЕВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



Вневписанная окружность треугольника – это окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон. У любого треугольника существует три вневписанных окружности

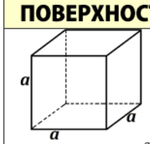
КУБ

ОБЪЁМ КУБА



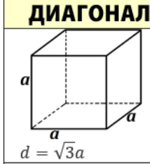
$V = a^3$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КУБА



$S_{\text{поверхности}} = 6a^2$

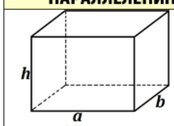
ДИАГОНАЛЬ КУБА



$d = \sqrt{3}a$

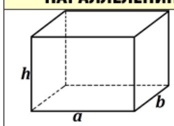
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

ОБЪЁМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА



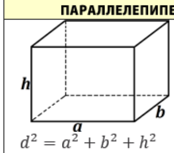
$V = abh$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА



$S_{\text{поверхности}} = 2ab + 2ah + 2bh$

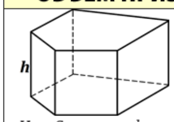
ДИАГОНАЛЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА



$d^2 = a^2 + b^2 + h^2$

ПРИЗМА

ОБЪЁМ ПРИЗМЫ



$V = S_{\text{основания}} \cdot h$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

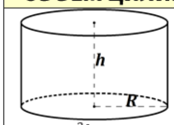
$S_{\text{поверхности}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.пов.}}$

ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

$S_{\text{боковой поверхности}} = P_{\text{основания}} \cdot h$

ЦИЛИНДР

ОБЪЁМ ЦИЛИНДРА



$V = \pi R^2 h$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

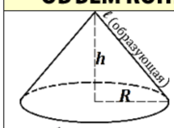
$S_{\text{поверхности}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$

ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

$S_{\text{боковой поверхности}} = 2\pi Rh$

КОНУС

ОБЪЁМ КОНУСА



$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

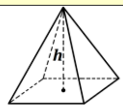
$S_{\text{поверхности}} = \pi R^2 + \pi Rl$

ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

$S_{\text{боковой поверхности}} = \pi Rl$

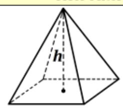
ПИРАМИДА

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$

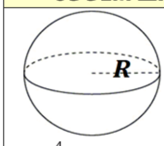
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ



$S_{\text{поверхности}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.пов.}}$

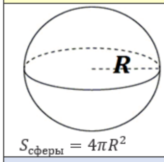
ШАР

ОБЪЁМ ШАРА



$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА



$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$

ЗАДАНИЕ 14

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной (ТТП)

Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость (Теорема, обратная ТТП)

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ

1	Проводим прямые через две точки, лежащие в одной плоскости
2	Плоскость сечения пересекает параллельные грани по параллельным прямым
3	Метод следов (если в некоторой грани известна одна точка сечения, а в соседней грани – отрезок, то продлеваем общее ребро, а затем продлеваем отрезок до пересечения с продолжением общего ребра)

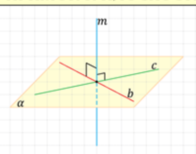
РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Расстояние между скрещивающимися прямыми – это длина общего перпендикуляра, проведённого к этим прямым

МЕТОД ОБЪЁМОВ

Расстояние от точки до плоскости можно найти как высоту пирамиды, выразив объём двумя способами

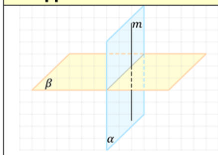
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

Если $\begin{cases} m \perp b \\ m \perp c \\ b \cap c \end{cases}$, то $m \perp \alpha$

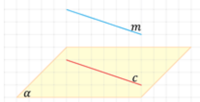
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



Плоскости перпендикулярны, если одна из плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости

Если $\begin{cases} m \in \alpha \\ m \perp \beta \end{cases}$, то $\alpha \perp \beta$

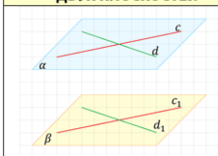
ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

Если $\begin{cases} m \parallel c \\ c \in \alpha \end{cases}$, то $m \parallel \alpha$

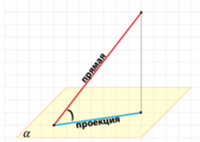
ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости

Если $\begin{cases} c \parallel c_1 \\ d \parallel d_1 \end{cases}$, то $\alpha \parallel \beta$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ (СПОСОБ #1)



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ (СПОСОБ #2)

Угол α – искомый

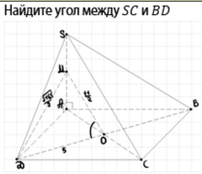
Находим угол β с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos\beta = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$$

1) Вводим начало системы координат
2) Находим координаты вектора прямой
$\overrightarrow{SC}\{3; 4; -\sqrt{11}\}$
3) Находим координаты вектора нормали $\vec{n}$ (берём отрезок, перпендикулярный плоскости)
4) Находим $\cos\beta$
5) $\angle\alpha = 90° - \angle\beta$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ (СПОСОБ #1)

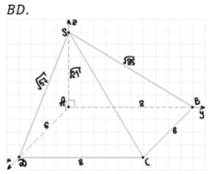
Найдите угол между SC и BD



Сделаем параллельный перенос SC на OM и найдём угол между OM и BD (т.к. OM – ср. линия ΔSAC, т.е. $OM \parallel SC$)

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ (СПОСОБ #2)

Найдите угол между прямыми SC и BD.

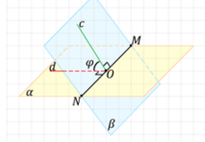


Находим угол с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos\alpha = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}$$

1) Вводим начало системы координат
2) Находим координаты вектора для прямой SC
$S(0; 0; \sqrt{21})$
$C(6; 8; 0)$
$\overrightarrow{SC}\{6; 8; -\sqrt{21}\}$
3) Находим координаты вектора для прямой BD
$B(0; 8; 0)$
$D(6; 0; 0)$
$\overrightarrow{BD}\{6; -8; 0\}$
4) Находим $\cos\alpha$
5) $\alpha = \arccos\ldots$

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #1)



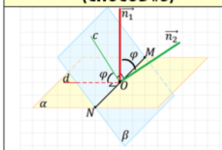
Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #2)

Находим угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции сечения

$\cos\alpha = \frac{S_{\text{проекции}}}{S_{\text{сечения}}}$

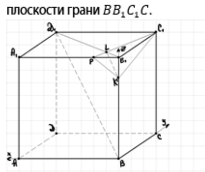
УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #3)



Находим угол между перпендикулярами к каждой из плоскостей

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #4)

Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.



Находим угол α с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos\alpha = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

1) Вводим начало системы координат
2) Находим координаты вектора нормали $\overrightarrow{n_1}$
$\overrightarrow{n_1}\{x; y; z\}$ должен быть перпендикулярен к плоскости α
=>
Прямая n_1 должна быть перпендикулярна сразу двум пересекающимся прямым в плоскости α (например, прямым PK и C_1K)
$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{PK} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{C_1K} = 0 \end{cases}$
3) Находим координаты вектора нормали $\overrightarrow{n_2}$
$\overrightarrow{n_2}\{x; y; z\}$ должен быть перпендикулярен к пл. грани BB_1C_1C
4) Находим $\cos\alpha$
5) $\alpha = \arccos\ldots$