Библиотечка СтатГрад

ЕГЭ 2019

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

ФГОС

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2019

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования города Москвы
«Центр педагогического мастерства»

Математика

Подготовка к ЕГЭ в 2019 году

Профильный уровень

Диагностические работы

Библиотечка СтатГрад

Издание соответствует Федеральному государственному
образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я72
М33

Составитель:
Ю. А. Березуцкая

М33 Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2019 году. Профильный уровень. Диагностические работы. — М.: МЦНМО, 2019.
ISBN 978-5-4439-1292-9

Данное пособие предназначено для отработки практических умений и навыков учащихся при подготовке к экзамену по математике в 11 классе в формате ЕГЭ на профильном уровне. Оно содержит варианты диагностических работ по математике, содержание которых соответствует контрольно-измерительным материалам, разработанным Федеральным институтом педагогических измерений для проведения Единого государственного экзамена. В книгу входят также ответы к заданиям и критерии проверки и оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом.

Материалы книги рекомендованы учителям и методистам для выявления уровня и качества подготовки учащихся по предмету, определения степени их готовности к Единому государственному экзамену.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Оригинал-макет издания подготовлен в ГАОУ ДПО ЦПМ.

В сборнике использованы задания, предложенные
М. А. Волчкевичем, И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым, О. Н. Косухиным, М. Я. Пратусевичем, А. Р. Рязановским, А. В. Семеновым, П. В. Семеновым, А. С. Трепалиным, А. В. Хачатуряном, С. А. Шестаковым

Учебно-методическое издание

Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2019 году.
Профильный уровень. Диагностические работы

Подписано в печать 26.07.2018 г. Формат 70 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «Принт сервис групп»,
тел./факс: (499) 785-05-18, e-mail:3565264@mail.ru, www.printsg.ru
105187, г. Москва, ул. Борисовская, д. 14, стр. 6.

ISBN 978-5-4439-1292-9

Предисловие

СтатГрад — это всероссийский интернет-проект, созданный для того, чтобы обеспечить каждое образовательное учреждение качественными дидактическими и методическими материалами. Основные направления деятельности СтатГрада — система диагностики образовательных достижений учащихся, методическая поддержка систем внутришкольного контроля, учебно-методические материалы для подготовки учащихся к ЕГЭ и ОГЭ. СтатГрад предоставляет методические материалы по всем ведущим дисциплинам школьной программы — по математике, физике, биологии, русскому языку, литературе, истории, обществознанию, химии, информатике, географии, иностранным языкам. Использование на уроках и при самостоятельной работе тренировочных и диагностических работ в формате ЕГЭ и ОГЭ, диагностических работ для 5–11 классов позволит учителям выявить пробелы в знаниях учащихся, а учащимся — подготовиться к государственным экзаменам, заранее попробовать свои силы. Авторы и эксперты СтатГрада — специалисты высокого класса, кандидаты и доктора наук, авторы учебной литературы для средней и высшей школы. В настоящее время СтатГрад сотрудничает более чем с 13 000 образовательных организаций России.

Настоящий сборник содержит диагностические материалы, разработанные специалистами СтатГрада для подготовки учащихся выпускных классов основной школы к ЕГЭ по математике. Материалы соответствуют нормативным документам ФИПИ 2018 года.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 1

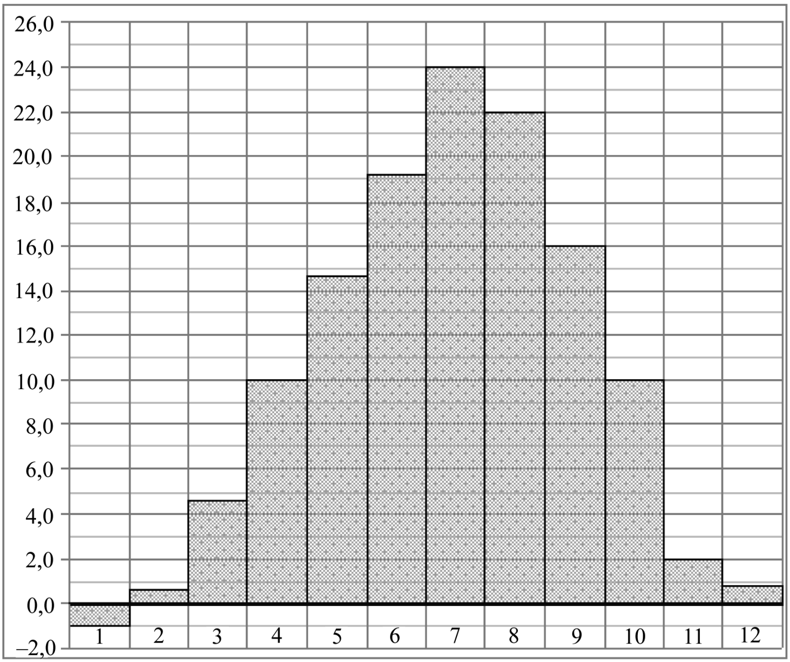
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Оптовая цена учебника 100 рублей. Розничная цена на 20 % выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 4000 рублей?

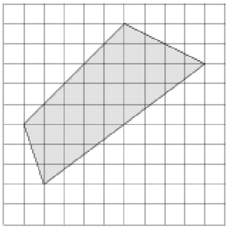
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 1988 году, когда среднемесячная температура превышала 12 градусов Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

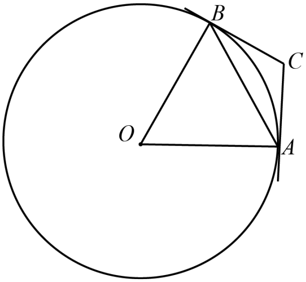
4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 19 пассажиров, равна 0,88. Вероятность того, что окажется меньше 9 пассажиров, равна 0,49. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 9 до 18.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5}{8-4x}} = \dfrac{1}{12}$.

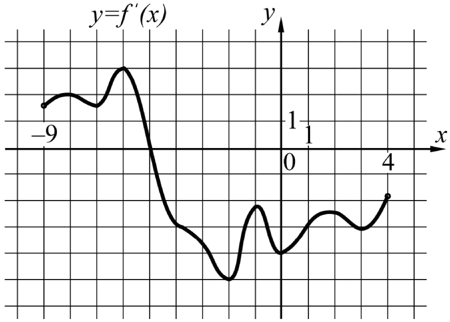
Ответ: ___________________________.

6 Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна $62°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



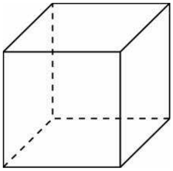
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-7;1]$.



Ответ: ______________________________.

8 Объём куба равен 343. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: ______________________________.

Часть 2

9 Найдите $9\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{5}{6}$.

Ответ: ______________________________.

10 К источнику с ЭДС $\varepsilon=60$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U=\frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: ______________________________.

11 Два велосипедиста одновременно отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y=(x+12)e^{x-12}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos\left(\frac{15\pi}{2}+x\right)}=-2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

15 Решите неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$.

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:4$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\dfrac{a\sqrt{3}\sin x+(\sqrt{3}-a)\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$.

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Вариант 2

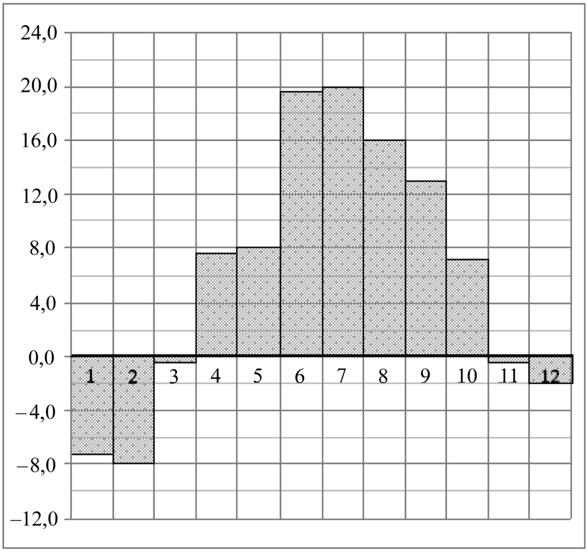
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Оптовая цена учебника 170 рублей. Розничная цена на 10 % выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 3200 рублей?

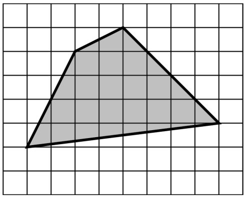
Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 1999 году, когда среднемесячная температура превышала 10 градусов Цельсия.



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

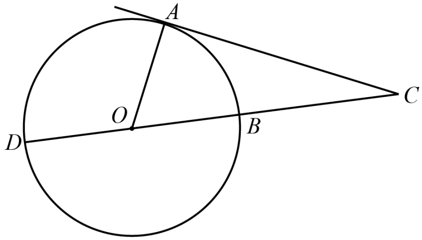
4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 17 пассажиров, равна 0,87. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,58. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 16.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{1}{10-3x}}=\dfrac{1}{4}$.

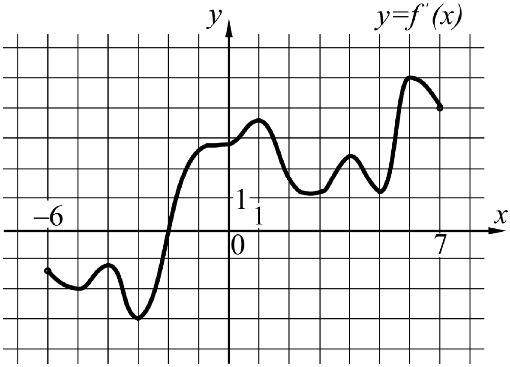
Ответ: ___________________________.

6 Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, сторона CO пересекает окружность в точках B и D (см. рисунок), а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна $116°$. Ответ дайте в градусах.



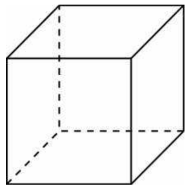
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-3; 2]$.



Ответ: ___________________________.

8 Объём куба равен 512. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите $8\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Ответ: ___________________________.

10 К источнику с ЭДС $\varepsilon = 36$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 30 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: ___________________________.

11 Два велосипедиста одновременно отправились в 208-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y=(x+22)e^{x-22}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)}=2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{17\pi}{2};\ 10\pi\right]$.

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $3\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $\left(2^{x+2}+2^{3-x}\right)x \geq 33x$.

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $4:5$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 0,59 млн рублей?

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{5a\sqrt{3}\sin 4x+(\sqrt{3}-5a)\cos 4x}{6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$.

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 429. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Вариант 3

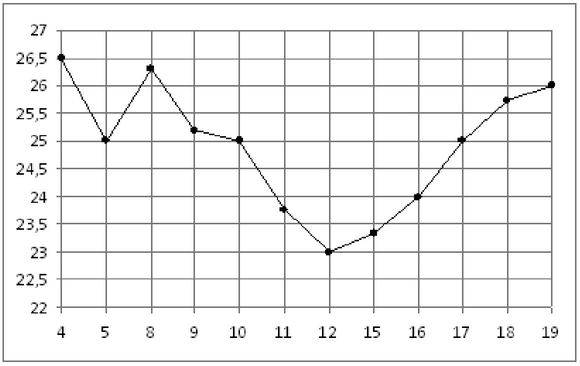
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Цена на электрический чайник была повышена на 23 % и составила 2337 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

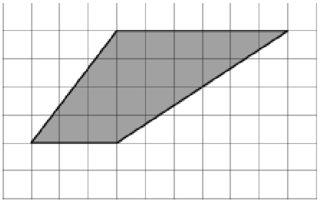
Ответ: ______________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



Ответ: ______________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ______________________________.

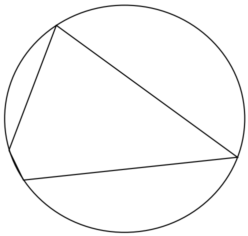
4 В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 14 октября погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 17 октября в Волшебной стране будет отличная погода.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_6(5-x)=2$.

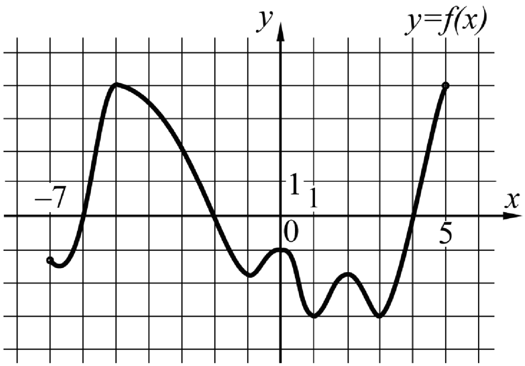
Ответ: ____________________________.

6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 29° и 57°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



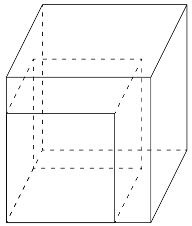
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-7;5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________________.

8 Если каждое ребро куба увеличить на 5, то его площадь поверхности увеличится на 270. Найдите ребро куба.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(397^2-78^2\right):475$.

Ответ: ____________________________.

10 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C=6\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R=6\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=26$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=1{,}2$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 43,2 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: ____________________________.

11 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 112 км/ч, и через 25 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=-3x^5-6x^3+14$ на отрезке $[-1;8]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=\frac{3}{\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

14 Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен $\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $\left(3^{x+2}+3^{2-x}\right)x^2 \geq \frac{45x^2}{2}$.

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:5$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 2,34 млн рублей?

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{(a-1)\sqrt{3}\sin 2x+(1+\sqrt{3}-a)\cos 2x}{6\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}=1$ при любом значении a из отрезка $[0;\,7\sqrt{3}]$.

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 165. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).
а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз больше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Вариант 4

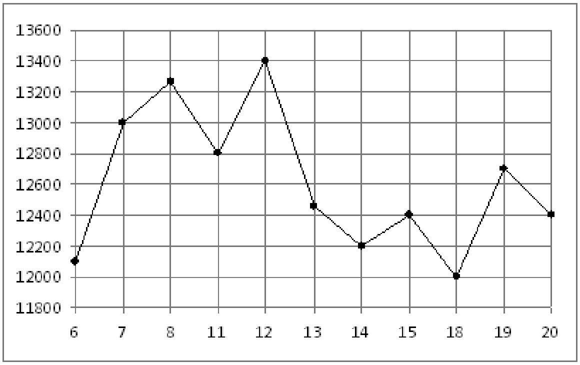
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Цена на электрический чайник была повышена на 17 % и составила 1989 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

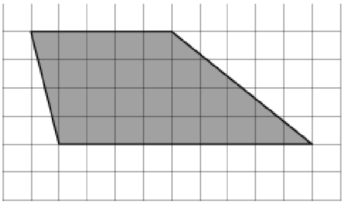
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена никеля на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ___________________________.

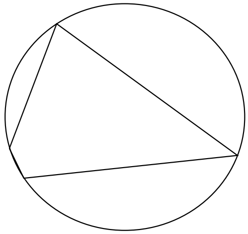
4 В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 5 апреля погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 8 апреля в Волшебной стране будет отличная погода.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_2(6-x)=5$.

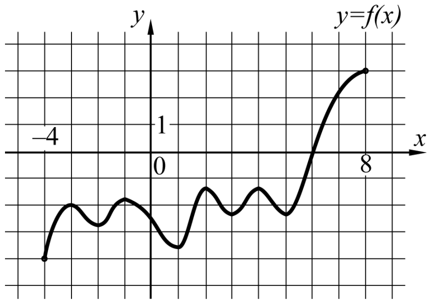
Ответ: ___________________________.

6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны $24°$ и $67°$. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



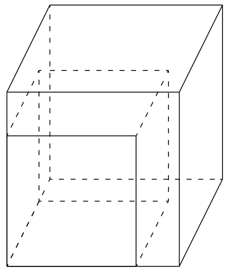
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-4;8)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ___________________________.

8 Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 162. Найдите ребро куба.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(625^2-52^2\right):677$.

Ответ: ____________________________.

10 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C=3\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R=8\cdot10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=4$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=1{,}4$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 33,6 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: ____________________________.

11 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 32 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 119 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=x^7+5x^3-16$ на отрезке $[-9;1]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $4\sin\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

14

Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен 4.

15

Решите неравенство $\left(5^{x+2}+5^{2-x}\right)x^2 \geq \frac{125x^2}{2}$.

16

Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $2:3$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 10 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,83 млн рублей?

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\dfrac{a\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}+(\sqrt{3}-a)\cos\dfrac{x}{2}}{6\sin\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}}=1$ при любом значении a из отрезка $[-2;\,5\sqrt{2}]$.

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 264. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Вариант 5

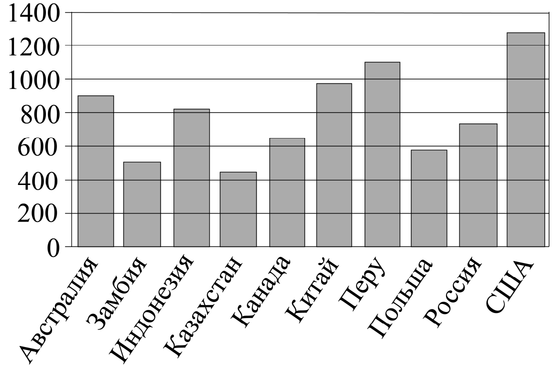
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 3 %. Книга стоит 300 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

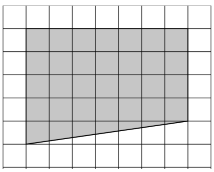
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Россия?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ___________________________.

4 Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию A = {сумма очков равна 9}?

Ответ: ___________________________.

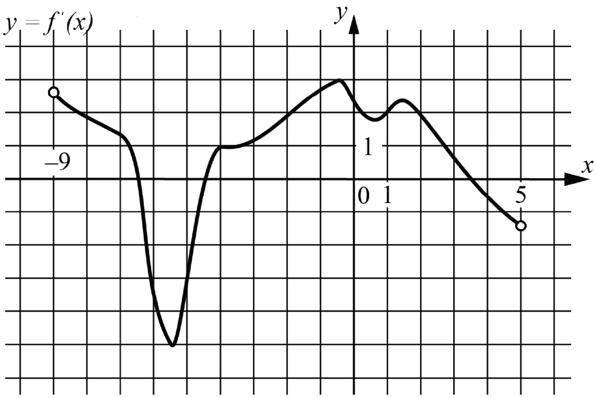
5 Найдите корень уравнения $-\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$.

Ответ: ____________________________.

6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Боковая сторона треугольника равна 26. Найдите площадь этого треугольника.

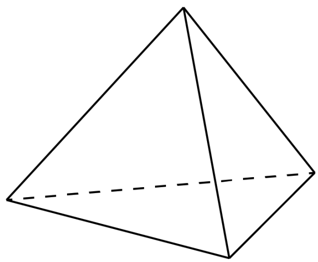
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;5)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Ответ: ____________________________.

8 Во сколько раз уменьшится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра уменьшить в три раза?



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $8^{\sqrt{8}+6} \cdot 8^{-5-\sqrt{8}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{729} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $5{,}13 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Ответ: ___________________________.

11 Васе надо решить 245 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Вася решил 11 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 7 дней.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 8x - 4\operatorname{tg} x - 2\pi + 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

15 Решите неравенство $\log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \geq 2x$.

16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

17 Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - \left(0{,}5x^2 + x + 9\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ **не выполнено.**

19 Шесть экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое четырёх оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{18}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{12}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Вариант 6

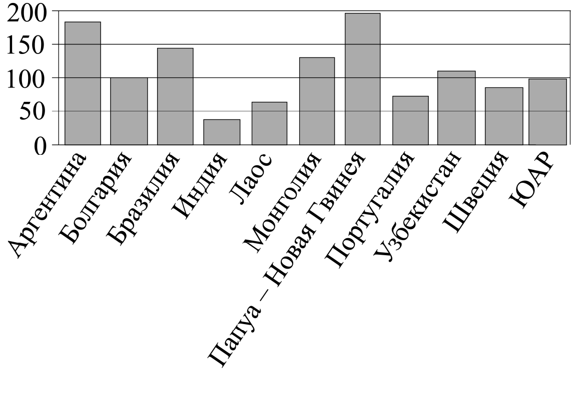
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 4 %. Книга стоит 150 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

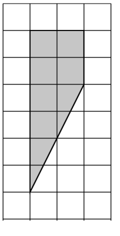
Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Бразилия?



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ____________________________.

4 Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию А = {сумма очков равна 2}?

Ответ: ___________________________.

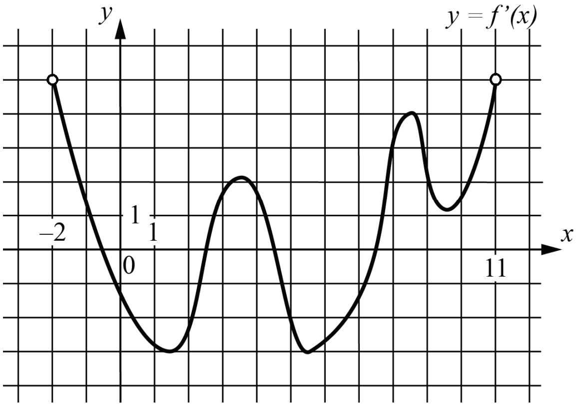
5 Найдите корень уравнения $-\frac{5}{6}x = 12\frac{1}{2}$.

Ответ: ___________________________.

6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Боковая сторона треугольника равна 40. Найдите площадь этого треугольника.

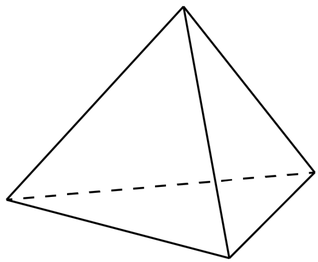
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Ответ: ___________________________.

8 Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в девять раз?



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $5^{\sqrt{3}+5} \cdot 5^{-4-\sqrt{3}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{128} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $1{,}14 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Ответ: ___________________________.

11 Васе надо решить 98 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Вася решил 8 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 7 дней.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 6x - 3\operatorname{tg} x - 1{,}5\pi + 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 2\cos 2x - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-6\pi;\ -\frac{9\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 6, а сторона основания равна 4. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

15 Решите неравенство $\log_3\left(81^x + 16^x - 18 \cdot 4^x + 32\right) \geq 4x$.

16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 6$, $CM = 4$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

17 Строительство нового завода стоит 122 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 - 2x + 10$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - \left(0{,}5x^2 - 2x + 10\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $20b \geq 6|2a+b| + 2|b-2| - |2a-b| - 5|4a^2 - b + 2|$ **не выполнено.**

19 Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Вариант 7

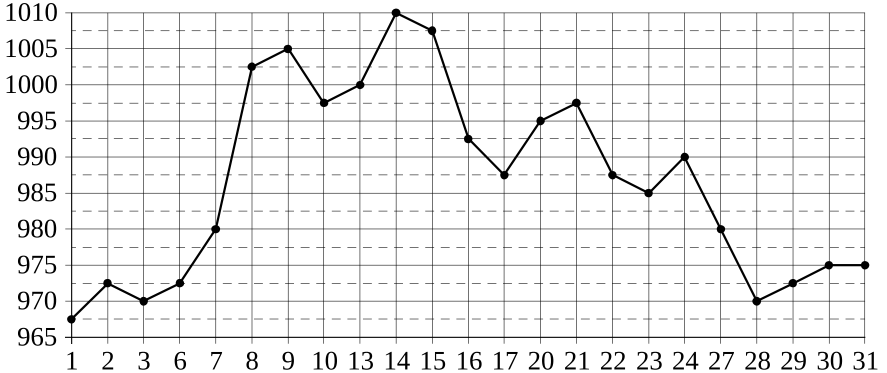
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3200 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1200 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 700 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

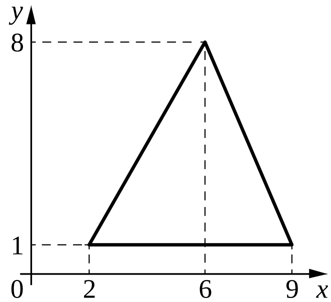
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена золота была больше 982,5 рубля за грамм.



Ответ: ____________________________.

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



Ответ: ___________________________.

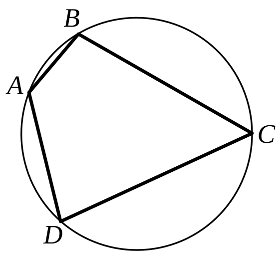
4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше четырёх задач, равна 0,73. Вероятность того, что А. верно решит больше трёх задач, равна 0,86. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 4 задачи.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_6(x-3)=2$.

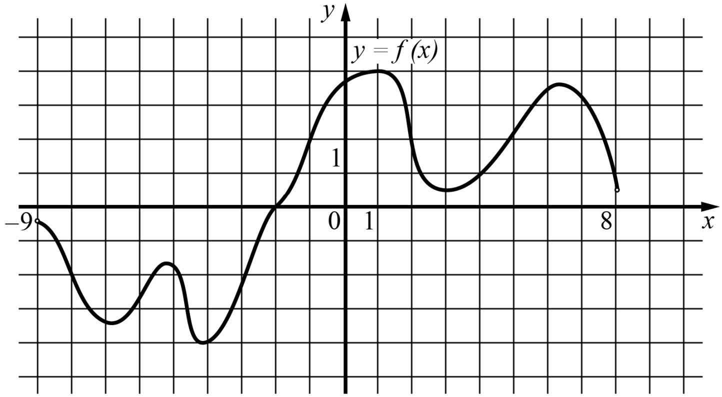
Ответ: ___________________________.

6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол BAD равен 125°. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.



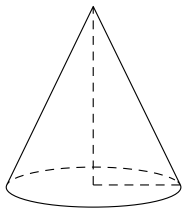
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 10$.



Ответ: ___________________________.

8 Высота конуса равна 33, а диаметр основания равен 88. Найдите образующую конуса.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\dfrac{15}{\sin^2 72^\circ + \sin^2 18^\circ}$.

Ответ: ___________________________.

10

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 32\,000$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 160 км/ч.

Ответ: ___________________________.

11

Грузовик перевозит партию щебня массой 340 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 4 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за последний день, если вся работа была выполнена за 17 дней.

Ответ: ___________________________.

12

Найдите наименьшее значение функции

$$y = e^{2x} - 8e^{x} + 1$$

на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 12. Точка N — середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении $2:1$, считая от вершины M.
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.
б) Найдите площадь этого сечения.

15

Решите неравенство $2^{\lg(x^2-4)} \geq (x+2)^{\lg 2}$.

16

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

17

В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2+2ax+a+4\le 0, \\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Вариант 8

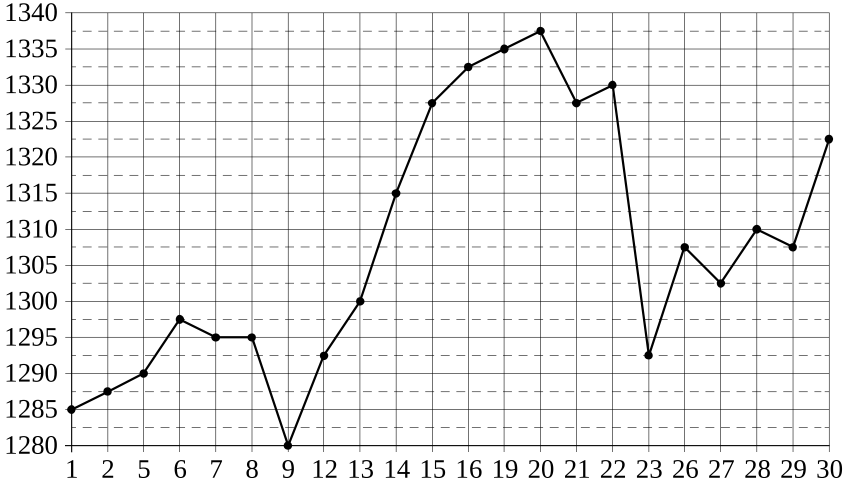
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2100 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1600 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1200 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

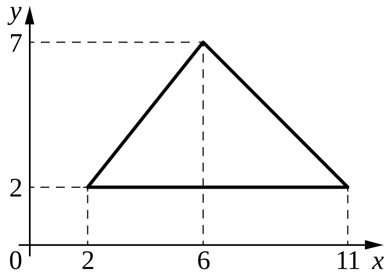
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена золота была больше 1305 рублей за грамм.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



Ответ: ____________________________.

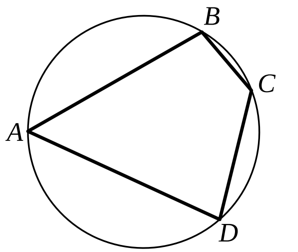
4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше девяти задач, равна 0,78. Вероятность того, что А. верно решит больше восьми задач, равна 0,87. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_3(x+4)=3$.

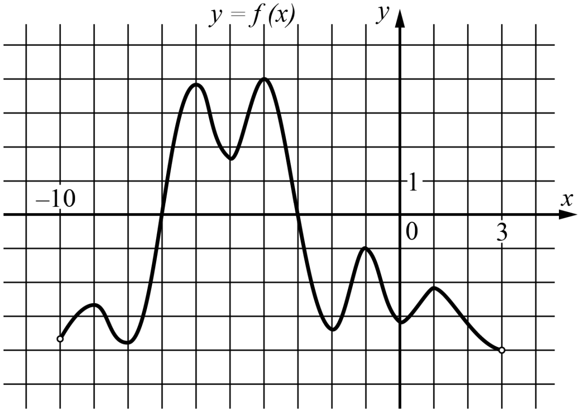
Ответ: ____________________________.

6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол BAD равен $72°$. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.



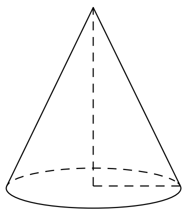
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -20$.



Ответ: ___________________________.

8 Высота конуса равна 42, а диаметр основания равен 112. Найдите образующую конуса.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{16}{\sin^2 48° + \sin^2 138°}$.

Ответ: ___________________________.

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 10\,000$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 100 км/ч.

Ответ: ___________________________.

11 Грузовик перевозит партию щебня массой 304 тонны, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 4 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за последний день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = e^{2x} - 6e^{x} - 2$$

на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 6. Точка N — середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении $5:1$, считая от вершины M.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

15 Решите неравенство $3^{\lg(x^2-1)} \geq (x+1)^{\lg 3}$.

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

17 В июле планируется взять кредит на сумму 2 320 500 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5 \leq 0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\dfrac{q}{d}$.

Вариант 9

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

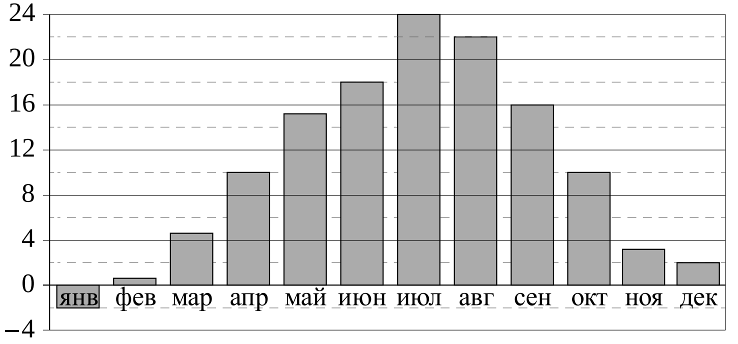
1

Задачу № 1 правильно решили 18 810 человек, что составляет 57 % выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

Ответ: ___________________________.

2

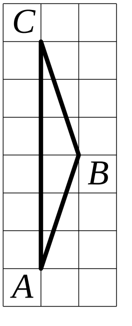
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его биссектрисы, проведённой из вершины B.



Ответ: ___________________________.

4

Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 75 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 12 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ: ____________________________.

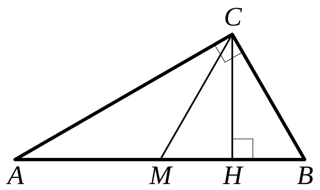
5

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-6}=2$.

Ответ: ____________________________.

6

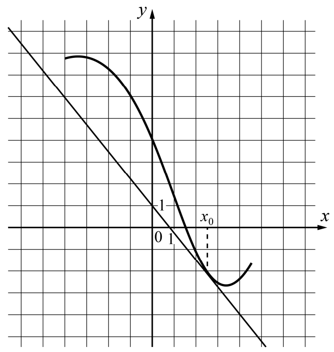
Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 55°. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ____________________________.

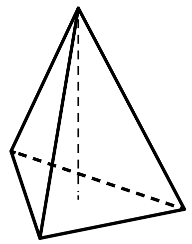
7

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________________________.

8 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6, а высота равна $4\sqrt{3}$.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{-10\sin 97^\circ \cdot \cos 97^\circ}{\sin 194^\circ}$.

Ответ: ____________________________.

10 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 1{,}25 \cdot 10^8$ Па $\cdot$ м^4, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \dfrac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $2 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: ____________________________.

11 Расстояние между городами A и B равно 403 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоцикл, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда мотоцикл вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-79 - 18x - x^2}$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

14 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.
а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды.

15 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2 - x - 1\right) \le 0$.

16 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.
а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.
б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

17 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

19 Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5=7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5=7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1}=\left(n^2+24\right)a_n$?

Вариант 10

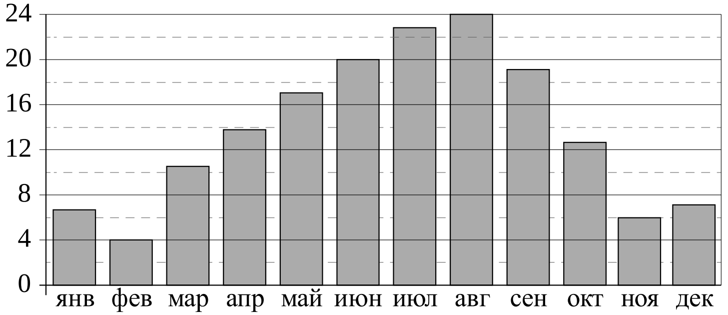
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Задачу № 1 правильно решили 31 320 человек, что составляет 87 % выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

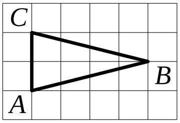
Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1920 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его биссектрисы, проведённой из вершины B.



Ответ: ____________________________.

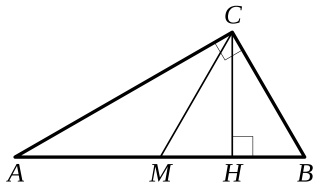
4 Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 75 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 21 выступление, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в четвёртый день конкурса?

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+9}=5$.

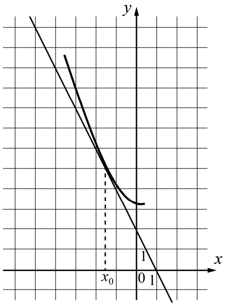
Ответ: ____________________________.

6 Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $69°$. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



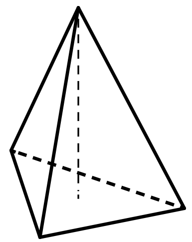
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________________________.

8 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8, а высота равна $6\sqrt{3}$.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{16\sin 112°\cdot\cos 112°}{\sin 224°}$.

Ответ: ____________________________.

10 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 7{,}29 \cdot 10^7$ Па $\cdot$ м^4, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: ____________________________.

11 Расстояние между городами A и B равно 798 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 120 км/ч выехал мотоцикл, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда мотоцикл вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-92 + 20x - x^2}$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi - x) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14 В основании правильной пирамиды *PABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину *B* и середину ребра *PD* перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

15 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2+7x+1\right)\geq 0$.

16 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.
а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.
б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 1 и 25 соответственно.

17 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}3x^2+3y^2=10xy,\\(x-a)^2+(y-a)^2=10a^4\end{cases}$ имеет ровно два решения.

19 Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ при всех натуральных n.
а) Может ли выполняться равенство $5a_5=9a_4$?
б) Может ли выполняться равенство $5a_5=7a_4$?
в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1}=\left(n^2-1\right)a_n$?

Вариант 11

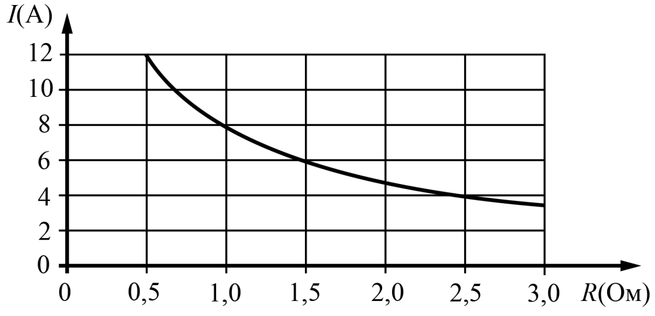
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Теплоход рассчитан на 1000 пассажиров и 30 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

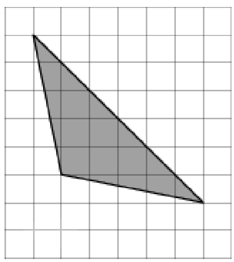
Ответ: ___________________________.

2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Каково сопротивление цепи (в омах), если сила тока составляет 6 А?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

4

В сборнике билетов по химии всего 25 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Углеводороды». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Углеводороды».

Ответ: ____________________________.

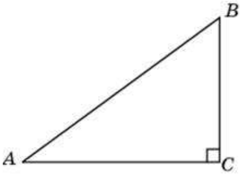
5

Найдите корень уравнения $\log_3(6-4x)=4\log_3 2$.

Ответ: ____________________________.

6

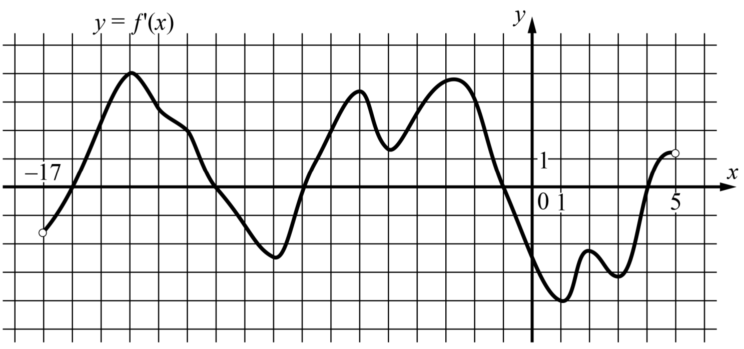
В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC=3$, $\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите AC.



Ответ: ____________________________.

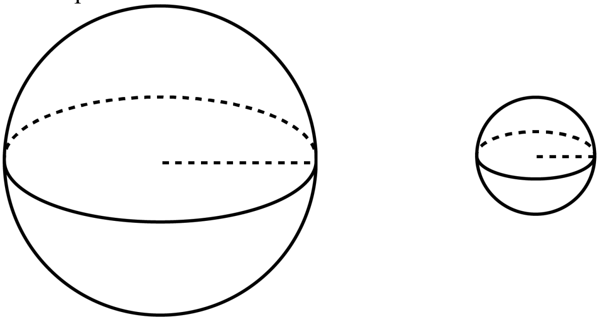
7

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-17;5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-15;0]$.



Ответ: ____________________________.

8 Дано два шара. Радиус первого шара в 14 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $4^{0,03} \cdot 8^{0,98}$.

Ответ: ____________________________.

10 Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 21$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 60 метров. Ответ выразите в секундах.

Ответ: ____________________________.

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 165 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 1 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 11x + 7\ln x + 12$ на отрезке $\left[\frac{11}{12}; \frac{13}{12}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 3\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14 На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

15 Решите неравенство $\dfrac{10^x - 2\cdot 5^x - 25\cdot 2^x + 50}{\sqrt{x+3}} \geq 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если угол CDB вдвое меньше угла ADB.

17 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 2 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 327 тысяч рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-1)^2+(y-4)^2\right)\left((x-6)^2+(y-4)^2\right) \le 0, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2 \le 4a^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.
а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 23$?
б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 23$?
в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 83$?

Вариант 12

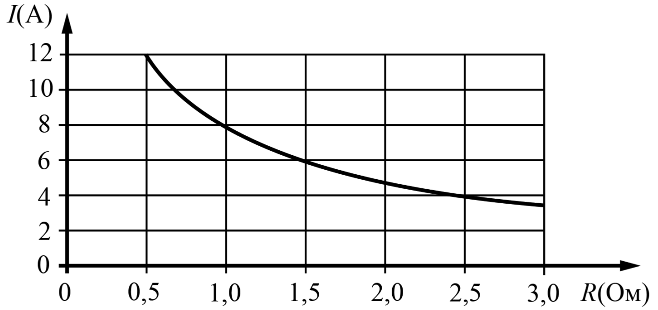
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

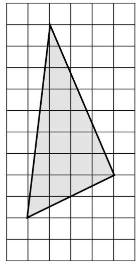
Ответ: ___________________________.

2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Каково сопротивление цепи (в омах), если сила тока составляет 4 А?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ______________________________.

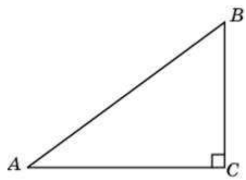
4 В сборнике билетов по философии всего 25 билетов, в 8 из них встречается вопрос по теме «Кант». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Кант».

Ответ: ______________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_7(18-4x)=2\log_7 2$.

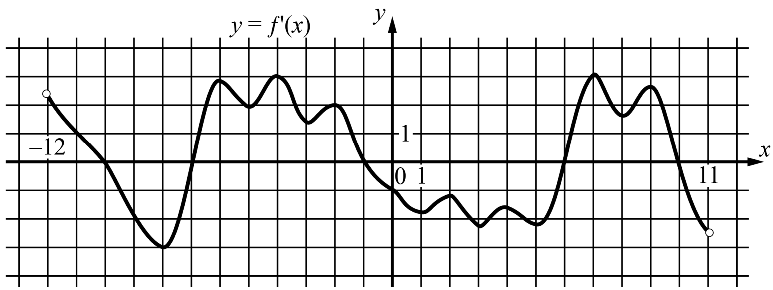
Ответ: ______________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC=10{,}5$, $\sin A=\dfrac{7\sqrt{149}}{149}$. Найдите AC.



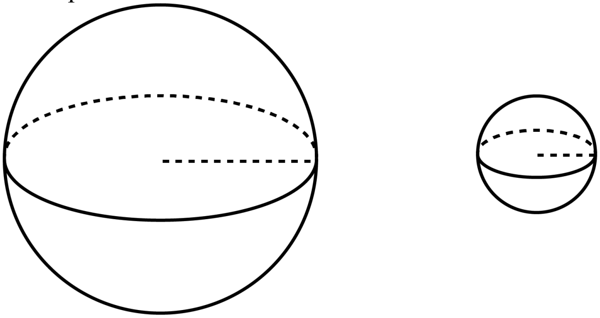
Ответ: ______________________________.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12;11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8;9]$.



Ответ: ______________________________.

8 Дано два шара. Радиус первого шара в 19 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $5^{0,06} \cdot 25^{0,97}$.

Ответ: ____________________________.

10 Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 22$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 60 метров. Ответ выразите в секундах.

Ответ: ____________________________.

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 51 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 1 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=3x^2-13x+7\ln x+5$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$.

Ответ: ______________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin 2x-2\cos\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

14 На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB=BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS=2$, $AC=\sqrt{10}$.

15 Решите неравенство $\dfrac{2\cdot 14^x-14\cdot 2^x-7^x+7}{\sqrt{x+5}}\ge 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM=\angle A_1D_1D$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если $\angle CDB:\angle ADB=3:8$.

17 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 1 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 836 тысяч рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-2)^2+(y-3)^2\right)\left((x-8)^2+(y-2)^2\right)\le 0, \\ (x-2a)^2+(y-a)^2\le 4a^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.
а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 11$?
б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 11$?
в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 74$?

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Ответы к заданиям

№ задания	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	33	17	1900	1700
2	5	4	4	12
3	30	21	18	28
4	0,39	0,29	0,392	0,244
5	–178	–2	–31	–26
6	118	26	151	156
7	–5	–2	0	9
8	294	384	2	3
9	3,5	–7	319	573
10	10	5	13	2
11	13	16	52	71
12	–13	–23	23	–10

№ задания	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
1	291	144	7	6
2	6	3	13	11
3	31,5	8	24,5	22,5
4	4	1	0,13	0,09
5	–5	–15	39	23
6	169	400	55	108
7	–7	21	6	9
8	27	729	55	70
9	8	5	15	16
10	9000	4000	0,4	0,5
11	59	20	36	34
12	–2	–1	–15	–11

№ задания	Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
1	33000	36000	15	16
2	2	6	1,5	2,5
3	1	4	12	17
4	0,28	0,24	0,24	0,32
5	14	116	–2,5	3,5
6	20	48	12	15
7	–1,25	–2	2	1
8	36	96	196	361
9	–5	8	8	25
10	125	27	4	5
11	234	504	43	47
12	–9	10	3	–5

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Вариант 1

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}+x\right)}=-2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

<u>Решение.</u>

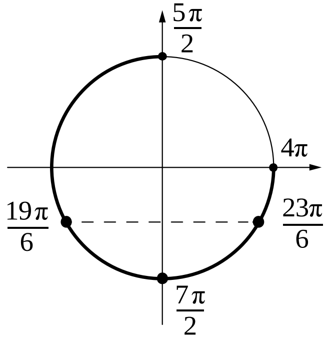
а) Поскольку $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}+x\right)=\sin x$, уравнение примет вид $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{\sin x}=-2$.

Пусть $\sin x=t$, тогда $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{3}{t}=-2$; $2t^2+3t+1=0$, откуда $t=-1$ или $t=-\dfrac{1}{2}$.

При $t=-1$ имеем $\sin x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. При $t=-\dfrac{1}{2}$ имеем $\sin x=-\dfrac{1}{2}$; $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Получим числа $\dfrac{19\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; $\dfrac{23\pi}{6}$.



Ответ: а) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

$x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{19\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; $\dfrac{23\pi}{6}$.

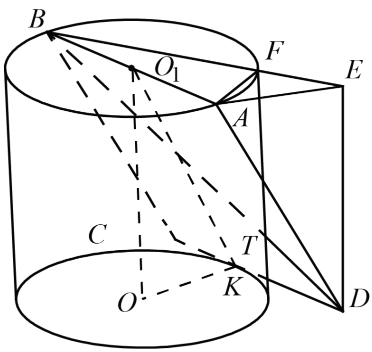
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

Решение.



а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 и $\cos\angle OKO_1 = \frac{OK}{O_1K} = \frac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $O_1K = AD = AB = 2r$, поэтому $\cos\angle OKO_1 = \frac{1}{2}$ и $\angle OKO_1 = 60°$.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\frac{DT}{TB} = \frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, имеем $\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA} \cdot \frac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\frac{EA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Поэтому и $\frac{DT}{TB} = \frac{1}{4}$, т. е. $BT = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}AD\sqrt{2} = \frac{4}{5}DE \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \frac{16}{5} = 3{,}2$.

Ответ: $3{,}2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$; $\dfrac{\left(3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^{x}+9\right)x}{3^{x}} \geq 0$;

$\dfrac{(3^{x}-9)(3\cdot 3^{x}-1)x}{3^{x}} \geq 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $[-1;\,0];[2;\,+\infty)$.

Ответ: $[-1;\,0];[2;\,+\infty)$.

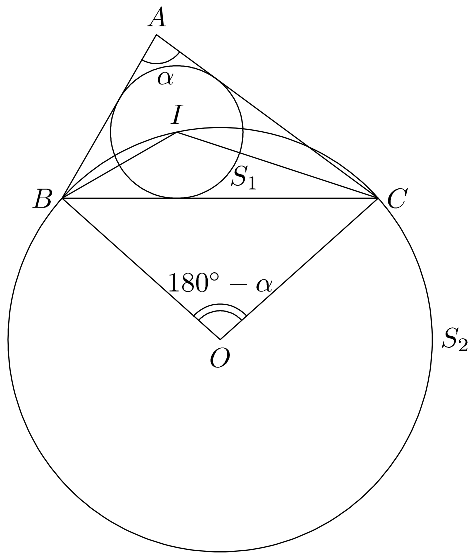
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:4$.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180^\circ + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360^\circ - (180^\circ + \alpha) = 180^\circ - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна 180°, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{4} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{BC}{2\sin\alpha}}{\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3

Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

<u>Решение.</u>
Пусть сумма кредита равна *S*. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{13S}{14};\ \ldots;\ \frac{2S}{14};\ \frac{S}{14};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{13S}{14};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{14};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{14}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}04S+\frac{S}{14};\ \frac{13\cdot 0{,}04S+S}{14};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{14};\ \frac{0{,}04S+S}{14}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=S\left(1+\frac{15\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}3S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1 млн рублей.
Ответ: 1 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{a\sqrt{3}\sin x+(\sqrt{3}-a)\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$.

Решение.

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, то есть среди решений уравнения

$\frac{\sqrt{3}\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$; $\sqrt{3}\cos x=6\sin x-\sqrt{3}\cos x$; $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x=\frac{\pi}{6}+m\pi$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$ — решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$ выполняется.

Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ — решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$ выполняется. Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+m\pi$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения x, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 20 раз было записано число 19 и один раз число 82. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 20 раз оказалось записано число 91 и один раз число 28. Сумма этих чисел равна $1848 = 4 \cdot 462$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}$, …, $\overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 462$ и $10B + A = 2 \cdot 462$. Тогда разность этих чисел равна $9(B - A) = 462$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}$, …, $\overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 462$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(462 - 10A) + A = 4620 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$462 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \frac{462}{19} > 24$, т. е. $A \ge 25$. Значит,

$$S = 4620 - 99A \le 4620 - 99 \cdot 25 = 2145.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 2145. Пусть первоначально на доске 23 раза было записано число 19 и один раз число 25. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 23 раза оказалось записано число 91 и один раз число 52. Сумма этих чисел равна 2145.

Ответ: а) да, например, 20 раз число 19 и один раз число 82; б) нет; в) 2145.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 2

13

а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = 2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{17\pi}{2};\ 10\pi\right]$.

Решение.

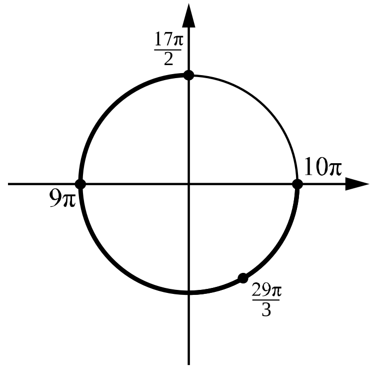
а) Поскольку $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, уравнение примет вид $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} = 2$.

Пусть $\cos x = t$, тогда $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = 2$; $2t^2 + t - 1 = 0$, откуда $t = -1$ или $t = \frac{1}{2}$. При $t = -1$ имеем $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. При $t = \frac{1}{2}$ имеем $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{17\pi}{2};\ 10\pi\right]$. Получим числа $9\pi;\ \frac{29\pi}{3}$.

Ответ: а) $x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $9\pi;\ \frac{29\pi}{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

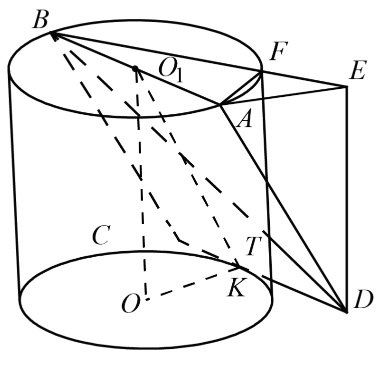
14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $3\sqrt{2}$.

<u>**Решение.**</u>

а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 и



$\cos\angle OKO_1 = \dfrac{OK}{O_1K} = \dfrac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $O_1K = AD = AB = 2r$, поэтому $\cos\angle OKO_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\angle OKO_1 = 60°$.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, имеем $\dfrac{EF}{FB} = \dfrac{EF}{FA} \cdot \dfrac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\dfrac{EA}{AB}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Поэтому и $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{1}{4}$, т. е. $BT = \dfrac{4}{5}BD = \dfrac{4}{5}AD\sqrt{2} = \dfrac{4}{5}DE \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \dfrac{16\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{16\sqrt{3}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство: $\left(2^{x+2} + 2^{3-x}\right)x \ge 33x$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\left(2^{x+2} + 2^{3-x}\right)x \ge 33x$; $\dfrac{\left(4\cdot 2^{2x} - 33\cdot 2^x + 8\right)x}{2^x} \ge 0$;

$\dfrac{(2^x - 8)(4\cdot 2^x - 1)x}{2^x} \ge 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $[-2;\, 0];[3;\, +\infty)$.

Ответ: $[-2;\, 0];[3;\, +\infty)$.

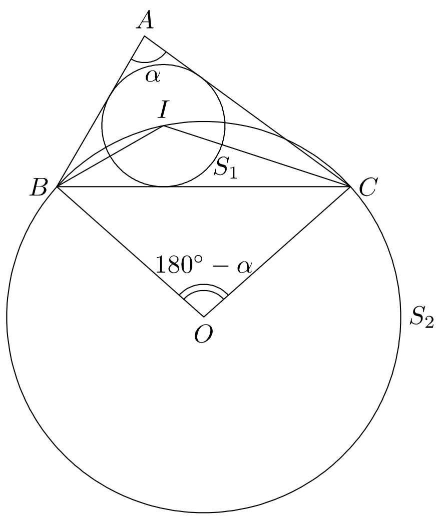
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $4:5$.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180° + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360° - (180° + \alpha) = 180° - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна $180°$, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{4}{5}=\frac{r}{R}=\frac{\dfrac{BC}{2\sin\alpha}}{\dfrac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{8}$. Следовательно, $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-2\cdot\dfrac{25}{64}=\dfrac{7}{32}$.

Ответ: $\dfrac{7}{32}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 0,59 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$S;\ \frac{10S}{11};\ \ldots;\ \frac{2S}{11};\ \frac{S}{11};\ 0.$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$1{,}03S;\ 1{,}03\cdot\frac{10S}{11};\ \ldots;\ 1{,}03\cdot\frac{2S}{11};\ 1{,}03\cdot\frac{S}{11}.$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$0{,}03S+\frac{S}{11};\ \frac{10\cdot 0{,}03S+S}{11};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}03S+S}{11};\ \frac{0{,}03S+S}{11}.$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}03\left(1+\frac{10}{11}+\ldots+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}\right)=S\left(1+\frac{12\cdot 0{,}03}{2}\right)=1{,}18S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 0,5 млн рублей.

Ответ: 0,5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{5a\sqrt{3}\sin 4x+(\sqrt{3}-5a)\cos 4x}{6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$.

Решение.

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, т. е. среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos 4x}{6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x}=1;\qquad \sqrt{3}\cos 4x=6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x;\qquad \operatorname{tg} 4x=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=\frac{\pi}{24}+\frac{m\pi}{4},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{5a\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$ выполняется. Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-5a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$ выполняется. Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{24}+\frac{m\pi}{4}$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *x*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 429. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

<u>Решение.</u>

а) Пусть первоначально на доске 18 раз было записано число 19 и один раз число 87. Тогда сумма этих чисел равна 429. После перестановки цифр на доске 18 раз оказалось записано число 91 и один раз число 78. Сумма этих чисел равна $1716 = 4 \cdot 429$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}$, …, $\overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 429$ и $10B + A = 3 \cdot 429$. Тогда разность этих чисел равна $9(B - A) = 2 \cdot 429$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}$, …, $\overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 429$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(429 - 10A) + A = 4290 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$429 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \dfrac{429}{19} > 22$, т. е. $A \ge 23$. Значит,

$$S = 4290 - 99A \le 4290 - 99 \cdot 23 = 2013.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 2013. Пусть первоначально на доске 22 раза было записано число 19 и один раз число 11. Тогда сумма этих чисел равна 429. После перестановки цифр на доске 22 раза оказалось записано число 91 и один раз число 11. Сумма этих чисел равна 2013.

Ответ: а) да, например, 18 раз число 19 и один раз число 87; б) нет; в) 2013.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 3

13 а) Решите уравнение $4\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=\frac{3}{\cos x}$.

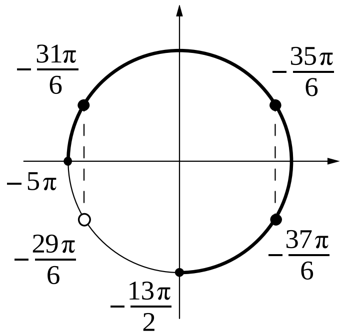
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

Решение.

а) Поскольку $\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=\cos x$, уравнение примет вид $4\cos x=\frac{3}{\cos x}$; $\cos^2 x=\frac{3}{4}$, откуда $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

Получим числа $-\frac{37\pi}{6}$; $-\frac{35\pi}{6}$; $-\frac{31\pi}{6}$.



Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{37\pi}{6}$; $-\frac{35\pi}{6}$; $-\frac{31\pi}{6}$.

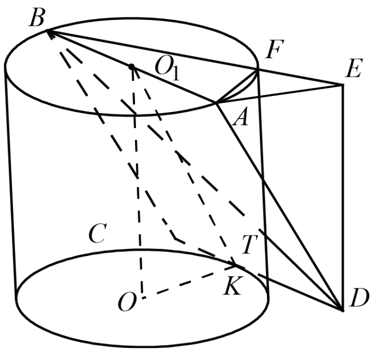
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен $\sqrt{2}$.

<u>Решение.</u>



а) Пусть сторона CD прямоугольника касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол $OKO_1 = 60°$ и

$$\cos\angle OKO_1 = \frac{OK}{O_1K} = \frac{r}{O_1K},$$

где r — радиус цилиндра. При этом $\cos\angle OKO_1 = \frac{1}{2}$, поэтому $O_1K = AD = AB = 2r$, значит, $ABCD$ — квадрат.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\frac{DT}{TB} = \frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, имеем $\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA} \cdot \frac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\frac{EA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Поэтому и $\frac{DT}{TB} = \frac{1}{4}$, т. е. $DT = \frac{1}{5}BD = \frac{1}{5}AD\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}r = \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{2} = 0{,}8$.

Ответ: $0{,}8$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(3^{x+2}+3^{2-x}\right)x^2 \ge \frac{45x^2}{2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $\left(3^{x+2}+3^{2-x}\right)x^2 \ge \frac{45x^2}{2}$; $\frac{\left(2\cdot 3^{2x}-5\cdot 3^x+2\right)x^2}{3^x} \ge 0$;

$\frac{(3^x-2)(2\cdot 3^x-1)x^2}{3^x} \ge 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $(-\infty; -\log_3 2]; \{0\}; [\log_3 2; +\infty)$.

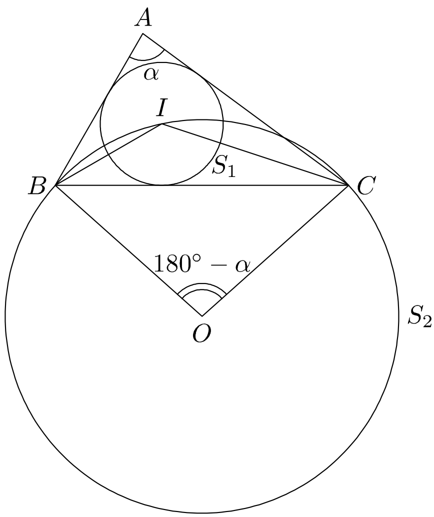
Ответ: $(-\infty; -\log_3 2]; \{0\}; [\log_3 2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:5$.



<u>Решение.</u>

а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180^\circ + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360^\circ - \left(180^\circ + \alpha\right) = 180^\circ - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна 180°, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{5} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{BC}{2\sin\alpha}}{\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\frac{25}{36} = -\frac{7}{18}$.

Ответ: $-\frac{7}{18}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 2,34 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{15S}{16};\ \ldots;\ \frac{2S}{16};\ \frac{S}{16};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}02S;\ 1{,}02\cdot\frac{15S}{16};\ \ldots;\ 1{,}02\cdot\frac{2S}{16};\ 1{,}02\cdot\frac{S}{16}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}02S+\frac{S}{16};\ \frac{15\cdot 0{,}02S+S}{16};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}02S+S}{16};\ \frac{0{,}02S+S}{16}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}02\left(1+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}\right)=S\left(1+\frac{17\cdot 0{,}02}{2}\right)=1{,}17S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 2 млн рублей.

Ответ: 2 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\dfrac{(a-1)\sqrt{3}\sin 2x+(1+\sqrt{3}-a)\cos 2x}{6\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}=1$ при любом значении a из отрезка $[0;\ 7\sqrt{3}]$.

<u>Решение.</u>

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=1$, т. е. среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos 2x}{6\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}=1;\qquad \sqrt{3}\cos 2x=6\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x;\qquad \operatorname{tg} 2x=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Пусть некоторое $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\dfrac{(a-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(1+\sqrt{3}-a)\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[0;\ 7\sqrt{3}]$ выполняется**.** Следовательно, все значения $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\dfrac{-(a-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}-(1+\sqrt{3}-a)\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[0;\ 7\sqrt{3}]$

выполняется. Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{2}$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *x*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 165. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 7 раз было записано число 19 и один раз число 32. Тогда сумма этих чисел равна 165. После перестановки цифр на доске 7 раз оказалось записано число 91 и один раз число 23. Сумма этих чисел равна $660=4\cdot 165$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=165$ и $10B+A=5\cdot 165$. Тогда разность этих чисел равна $9(B-A)=4\cdot 165$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=165$, и нужно найти наибольшее значение числа $S=10B+A$. Тогда

$$S=10B+A=10(165-10A)+A=1650-99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$165 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \frac{165}{19} > 8$, то есть $A \ge 9$. Значит,

$$S = 1650 - 99A \le 1650 - 99 \cdot 9 = 759.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 759. Пусть первоначально на доске 8 раз было записано число 19 и один раз число 13. Тогда сумма этих чисел равна 165. После перестановки цифр на доске 8 раз оказалось записано число 91 и один раз число 31. Сумма этих чисел равна 759.

Ответ: а) да, например, 7 раз число 19 и один раз число 23; б) нет; в) 759.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 4

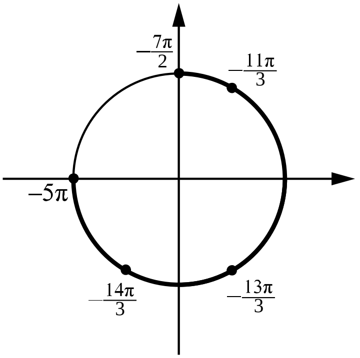
13 а) Решите уравнение $4\sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Поскольку $\sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\cos x$, уравнение примет вид $4\cos x = \frac{1}{\cos x}$; $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, откуда $\cos x = \pm\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{3}$.



Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

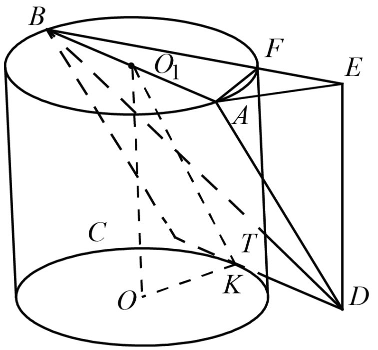
14 Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен 4.

<u>Решение.</u>

а) Пусть сторона CD прямоугольника касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол $OKO_1=60°$ и



$\cos\angle OKO_1 = \dfrac{OK}{O_1K} = \dfrac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $\cos\angle OKO_1 = \dfrac{1}{2}$, поэтому $O_1K = AD = AB = 2r$, значит, $ABCD$ — квадрат.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90^\circ$ как угол, опирающийся на диаметр, имеем $\dfrac{EF}{FB} = \dfrac{EF}{FA}\cdot\dfrac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\dfrac{EA}{AB}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Поэтому и $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{1}{4}$, т. е. $DT = \dfrac{1}{5}BD = \dfrac{1}{5}AD\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}r = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\cdot 4 = \dfrac{8\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(5^{x+2} + 5^{2-x}\right)x^2 \geq \dfrac{125x^2}{2}$.

<u>Решение.</u>

Преобразуем неравенство: $\left(5^{x+2} + 5^{2-x}\right)x^2 \geq \dfrac{125x^2}{2}$; $\dfrac{\left(2\cdot 5^{2x} - 5\cdot 5^x + 2\right)x^2}{5^x} \geq 0$;

$\dfrac{(5^x - 2)(2\cdot 5^x - 1)x^2}{5^x} \geq 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $(-\infty; -\log_5 2]; \{0\}; [\log_5 2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -\log_5 2]; \{0\}; [\log_5 2; +\infty)$.

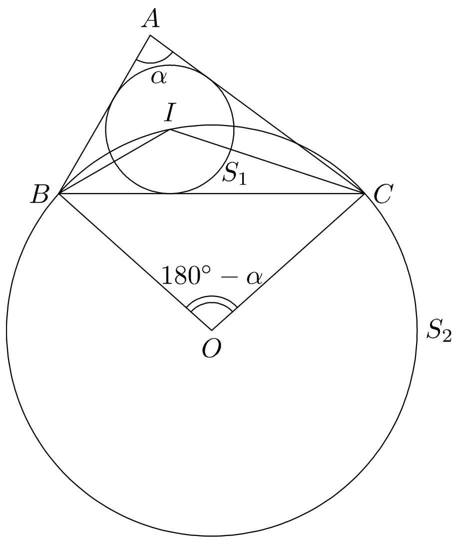
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $2:3$.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180° + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360° - (180° + \alpha) = 180° - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна $180°$, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{2}{3}=\frac{r}{R}=\frac{\dfrac{BC}{2\sin\alpha}}{\dfrac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$. Следовательно, $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\cdot\frac{9}{16}=-\frac{1}{8}$.

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 10 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,83 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

S; $\frac{9S}{10}$; …; $\frac{2S}{10}$; $\frac{S}{10}$; 0.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$1{,}04S$; $1{,}04\cdot\frac{9S}{10}$; …; $1{,}04\cdot\frac{2S}{10}$; $1{,}04\cdot\frac{S}{10}$.

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$0{,}04S+\frac{S}{10}$; $\frac{9\cdot 0{,}04S+S}{10}$; …; $\frac{2\cdot 0{,}04S+S}{10}$; $\frac{0{,}04S+S}{10}$.

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{9}{10}+\ldots+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)=S\left(1+\frac{11\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}22S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1,5 млн рублей.

Ответ: 1,5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{a\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+(\sqrt{3}-a)\cos\frac{x}{2}}{6\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}=1$ при любом значении a из отрезка $[-2;\,5\sqrt{2}]$.

Решение.

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, т. е. среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}{6\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}=1;\quad \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=6\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2};\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=\frac{\pi}{3}+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\dfrac{a\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-2;5\sqrt{2}]$ выполняется**.** Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbb{Z}$, условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{3}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\dfrac{-a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-2;5\sqrt{2}]$ выполняется**.** Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{3}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2m\pi$, где $m\in\mathbb{Z}$**.**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения x, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 264. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 11 раз было записано число 19 и один раз число 55. Тогда сумма этих чисел равна 264. После перестановки цифр на доске 11 раз оказалось записано число 91 и один раз число 55. Сумма этих чисел равна $1056 = 4 \cdot 264$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}$, …, $\overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 264$ и $10B + A = 3 \cdot 264$. Тогда разность этих чисел равна $9(B - A) = 2 \cdot 264$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}$, …, $\overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 264$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(264 - 10A) + A = 2640 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$264 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \frac{264}{19} > 13$, т. е. $A \ge 14$. Значит,

$$S = 2640 - 99A \le 2640 - 99 \cdot 14 = 1254.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 1254. Пусть первоначально на доске 13 раз было записано число 19 и один раз число 17. Тогда сумма этих чисел равна 264. После перестановки цифр на доске 13 раз оказалось записано число 91 и один раз число 71. Сумма этих чисел равна 1254.

Ответ: а) да, например, 11 раз число 19 и один раз число 55; б) нет; в) 1254.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 5

13 а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

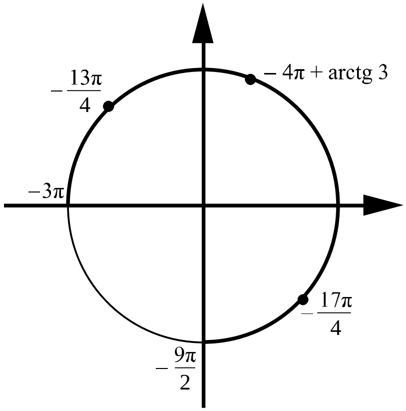
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$2\sin x\cos x + 2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$;

$3\sin x\cos x + 3\cos^2 x - \sin x\cos x - \sin^2 x = 0$;

$(\sin x + \cos x)(3\cos x - \sin x) = 0$.



Получаем $\sin x + \cos x = 0$; $\sin x = -\cos x$; $\mathrm{tg}x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, или $3\cos x - \sin x = 0$; $\sin x = 3\cos x$; $\mathrm{tg}x = 3$; $x = \mathrm{arctg}3 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$. Получим числа $-\frac{17\pi}{4}$; $\mathrm{arctg}3 - 4\pi$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\mathrm{arctg}3 + \pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $\mathrm{arctg}3 - 4\pi$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

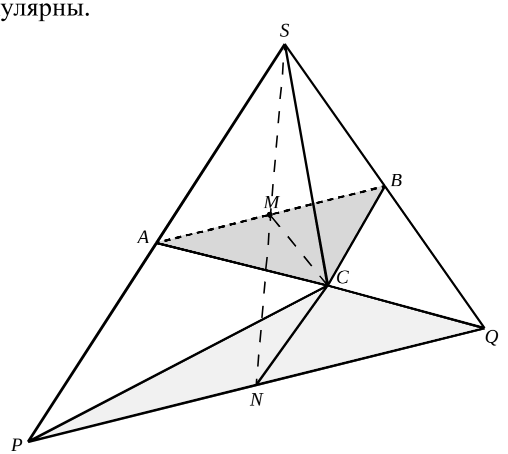
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

Решение.

а) Пусть M — середина ребра AB, N — середина отрезка PQ. В равнобедренных треугольниках ASB и PSQ медианы SM и SN являются биссектрисами и высотами. Следовательно, точки S, M и N лежат на одной прямой. Треугольник PCQ равнобедренный, так как треугольники PAC и QBC равны, а значит, $PC = CQ$. В треугольниках ABC и PCQ высотами служат отрезки CM и CN соответственно. Из того, что отрезок PQ перпендикулярен отрезку SN и отрезку CN, следует, что прямая PQ перпендикулярна плоскости SNC, но перпендикуляр к плоскости перпендикулярен любой прямой, лежащей в ней, следовательно, прямые PQ и SC перпендикулярны.



б) Из решения предыдущего пункта видно, что плоскость NSC перпендикулярна плоскостям ABC и PCQ, а потому $\angle MCN = \alpha$ искомый. Найдём стороны треугольника MCN.

Ясно, что $MN = SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 2\sqrt{10}$ и $CM = AM \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

В треугольнике SBC имеем $\cos\angle CSB = \dfrac{SB^2 + SC^2 - CB^2}{2 \cdot SB \cdot SC} = \dfrac{31}{49}$.

Из треугольника SCQ по теореме косинусов находим
$CQ^2 = CS^2 + SQ^2 - 2 \cdot CS \cdot SQ \cdot \cos\angle CSB = 121$.

Следовательно, $CN = \sqrt{CQ^2 - NQ^2} = \sqrt{121-36} = \sqrt{85}$. Из треугольника MCN по теореме косинусов находим $\cos\alpha = \dfrac{27+85-40}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{85}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \geq 2x$.

<u>Решение.</u>

Преобразуем неравенство:

$$\log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \geq 2x; \quad \log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \geq \log_6 36^x;$$

$$64^x - 65\cdot 8^x + 64 \geq 0; \quad \left(8^x - 1\right)\left(8^x - 64\right) \geq 0.$$

Получаем $x \geq 2$ и $x \leq 0$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $[2;\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

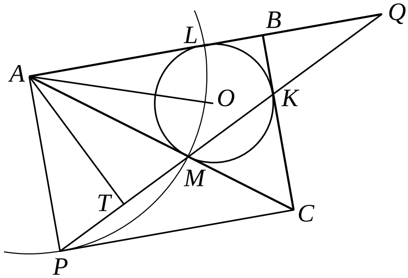
16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

Решение.

а) Поскольку $CK = CM$ и $AP = AM$, треугольники MCK и PAM равнобедренные, причём $\angle CMK = \angle AMP$ — углы при их основаниях MK и MP. Значит, $\angle MKC = \angle MPA$. Следовательно, прямая AP параллельна прямой BC.



б) Обозначим $BK = BL = x$. Тогда $CK = CM = 2$, $AL = AM = 3$, $BC = 2 + x$, $AB = 3 + x$.

По теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2$, или $25 = (2+x)^2 + (3+x)^2$, откуда $x = 1$. Значит, $BC = 3$, $AB = 4$.

Поскольку $BC = AP = 3$ и прямая BC параллельна прямой AP, четырёхугольник $ABCP$ — прямоугольник, значит, $CP = AB = 4$.

Треугольник AMQ подобен треугольнику CMP с коэффициентом $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{3}{2}$, поэтому $AQ = \dfrac{3}{2}CP = \dfrac{3}{2} \cdot 4 = 6$.

По теореме Пифагора $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle MAO = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle MAT = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$,

$\angle PAT = 90° - \angle QAT = 90° - \left(45° + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$,

поэтому AT — биссектриса, а значит, и высота равнобедренного треугольника MAP.

Таким образом, AT — высота прямоугольного треугольника PAQ, проведённая из вершины прямого угла, следовательно, $QT = \dfrac{AQ^2}{PQ} = \dfrac{36}{3\sqrt{5}} = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\dfrac{12}{\sqrt{5}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - \left(0{,}5x^2 + x + 9\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

<u>Решение.</u>

Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составляет

$$px - \left(0{,}5x^2 + x + 9\right) = -0{,}5x^2 + (p-1)x - 9.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = p - 1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2} - 9$. Строительство завода окупится не более чем за 5 лет, если

$$\frac{(p-1)^2}{2} - 9 \geq \frac{115}{5};\quad (p-1)^2 \geq 64;\quad (p-9)(p+7) \geq 0,$$

то есть при $p \geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p = 9$.

Ответ: $p = 9$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b>a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b|-3|b-2|-|a-b|-9\left|a^2-b+2\right|+16$ **не выполнено.**

Решение.

Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a, при каждом из которых неравенство $21b \geq 6|a+b|-3|b-2|-|a-b|-9\left|a^2-b+2\right|+16$ выполнено при любом $b>a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b)=21b-6|a+b|+3|b-2|+|a-b|+9\left|a^2-b+2\right|-16 \geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b>a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \geq 0$, то есть $9a^2+12a-12|a|+3|a-2|+2 \geq 0$. Отметим, что при $a \geq 0$ полученное неравенство верно. Если $a<0$, то неравенство равносильно неравенству

$$9a^2+21a+8 \geq 0; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{-7+\sqrt{17}}{6} \leq a<0; \\ a \leq \dfrac{-7-\sqrt{17}}{6}. \end{array}\right.$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a=-1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении $a=-1$ существует такое $b>a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b|-3|b-2|-|a-b|-9\left|a^2-b+2\right|+16$ не выполнено.

Ответ: -1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения неравенства	2
Задача верно сведена к исследованию решения неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Шесть экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое четырёх оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{18}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{12}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

<u>Решение.</u>

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{6}$, $B=\frac{n}{4}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит, $A-B=\frac{m}{6}-\frac{n}{4}=\frac{2m-3n}{12}$. Если $A-B=\frac{1}{18}$, то $2m-3n=\frac{12}{18}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{18}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 5, 6 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+3+5+6}{6}-\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{17}{6}-\frac{11}{4}=\frac{1}{12}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных четырёх оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{6}-\frac{y}{4}=\frac{2x-y+2z}{12}\leq$$

$$\leq\frac{2x+2z-\left(\left(x+1\right)+\left(x+2\right)+\left(x+3\right)+\left(x+4\right)\right)}{12}=$$

$$=\frac{2z-2x-10}{12}\leq\frac{2\cdot 10-2\cdot 0-10}{12}=\frac{5}{6}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 10 разность $A-B$ равна $\frac{5}{6}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{5}{6}$.

Ответ: а) нет; б) да, например, для оценок 0, 1, 2, 3, 5, 6; в) $\frac{5}{6}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 6

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x-2\cos 2x-\sin 2x=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-6\pi;\ -\frac{9\pi}{2}\right]$.

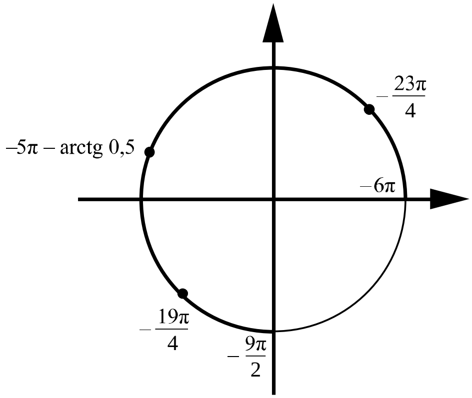
<u>Решение.</u>

а) Преобразуем уравнение:

$2\sin^2 x-2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-2\sin x\cos x=0$;

$4\sin^2 x-2\cos^2 x-4\sin x\cos x+2\sin x\cos x=0$;

$2\left(\sin x-\cos x\right)\left(2\sin x+\cos x\right)=0$.



Получаем $\sin x - \cos x = 0$; $\sin x = \cos x$; $\text{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, или $2\sin x + \cos x = 0$; $\sin x = -0{,}5\cos x$; $\text{tg} x = -0{,}5$; $x = -\text{arctg} 0{,}5 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-6\pi;\ -\frac{9\pi}{2}\right]$. Получим числа $-\frac{23\pi}{4}$; $-\text{arctg} 0{,}5 - 5\pi$; $-\frac{19\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $-\text{arctg} 0{,}5 + \pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{23\pi}{4}$; $-\text{arctg} 0{,}5 - 5\pi$; $-\frac{19\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

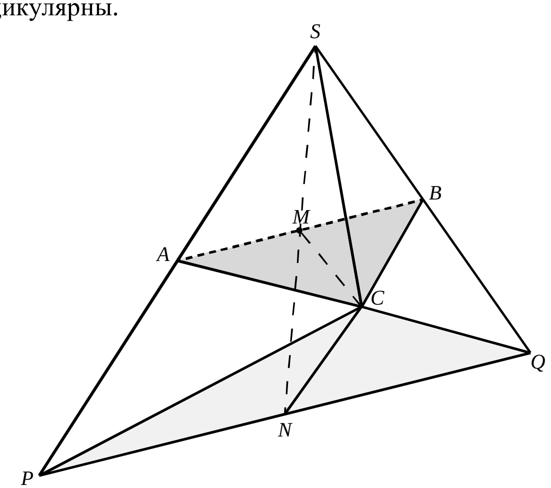
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 6, а сторона основания равна 4. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

Решение.

а) Пусть M — середина ребра AB, N — середина отрезка PQ. В равнобедренных треугольниках ASB и PSQ медианы SM и SN являются биссектрисами и высотами. Следовательно, точки S, M и N лежат на одной прямой. Треугольник PCQ равнобедренный, так как треугольники PAC и QBC равны, а значит, $PC = CQ$. В треугольниках ABC и PCQ высотами служат отрезки CM и CN соответственно. Из того, что отрезок PQ перпендикулярен отрезку SN и отрезку CN, следует, что прямая PQ перпендикулярна плоскости SNC, но перпендикуляр к плоскости перпендикулярен любой прямой, лежащей в ней, следовательно, прямые PQ и SC перпендикулярны.



б) Из решения предыдущего пункта видно, что плоскость NSC перпендикулярна плоскостям ABC и PCQ, а потому $\angle MCN = \alpha$ искомый. Найдём стороны треугольника MCN.

Ясно, что $MN = SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 4\sqrt{2}$ и $CM = AM \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

В треугольнике SBC имеем $\cos\angle CSB = \dfrac{SB^2 + SC^2 - CB^2}{2 \cdot SB \cdot SC} = \dfrac{7}{9}$.

Из треугольника SCQ по теореме косинусов находим

$$CQ^2 = CS^2 + SQ^2 - 2 \cdot CS \cdot SQ \cdot \cos\angle CSB = 68.$$

Следовательно, $CN = \sqrt{CQ^2 - NQ^2} = \sqrt{68 - 16} = 2\sqrt{13}$. Из треугольника MCN по теореме косинусов находим $\cos\alpha = \dfrac{12 + 52 - 32}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13}} = \dfrac{4}{\sqrt{39}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{4}{\sqrt{39}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_3\left(81^x+16^x-18\cdot 4^x+32\right)\geq 4x$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_3\left(81^x+16^x-18\cdot 4^x+32\right)\geq 4x;\quad \log_3\left(81^x+16^x-18\cdot 4^x+32\right)\geq \log_3 81^x;$$

$$16^x-18\cdot 4^x+32\geq 0;\quad \left(4^x-2\right)\left(4^x-16\right)\geq 0.$$

Получаем $x\geq 2$ и $x\leq\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$; $\left[2;\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

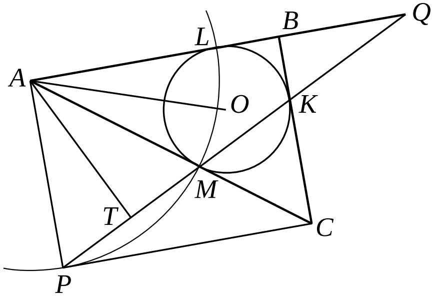
16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC=90°$, $AM=6$, $CM=4$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT=45°$. Найдите QT.

Решение.

а) Поскольку $CK=CM$ и $AP=AM$, треугольники MCK и PAM равнобедренные, причём $\angle CMK=\angle AMP$ — углы при их основаниях MK и MP. Значит, $\angle MKC=\angle MPA$. Следовательно, прямая AP параллельна прямой BC.



б) Обозначим $BK = BL = x$. Тогда $CK = CM = 4$, $AL = AM = 6$, $BC = 4 + x$, $AB = 6 + x$.

По теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2$, или $100 = (4+x)^2 + (6+x)^2$, откуда $x = 2$. Значит, $BC = 6$, $AB = 8$.

Поскольку $BC = AP = 6$ и прямая BC параллельна прямой AP, четырёхугольник $ABCP$ — прямоугольник, значит, $CP = AB = 8$.

Треугольник AMQ подобен треугольнику CMP с коэффициентом $\frac{AM}{MC} = \frac{3}{2}$, поэтому $AQ = \frac{3}{2}CP = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$.

По теореме Пифагора $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{36 + 144} = 6\sqrt{5}$.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle MAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle MAT = 45° - \frac{\alpha}{2}$,

$\angle PAT = 90° - \angle QAT = 90° - \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = 45° - \frac{\alpha}{2}$,

поэтому AT — биссектриса, а значит, и высота равнобедренного треугольника MAP.

Таким образом, AT — высота прямоугольного треугольника PAQ, проведённая из вершины прямого угла, следовательно, $QT = \frac{AQ^2}{PQ} = \frac{144}{6\sqrt{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{5}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Строительство нового завода стоит 122 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2-2x+10$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0{,}5x^2-2x+10\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Решение.
Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составляет

$$px-\left(0{,}5x^2-2x+10\right)=-0{,}5x^2+(p+2)x-10.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p+2$. Наибольшее значение равно $\frac{(p+2)^2}{2}-10$. Строительство завода окупится не более чем за 4 года, если

$$\frac{(p+2)^2}{2}-10\ge\frac{122}{4};\quad (p+2)^2\ge 81;\quad (p+11)(p-7)\ge 0,$$

то есть при $p\ge 7$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=7$.

Ответ: $p=7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $20b \geq 6|2a+b| + 2|b-2| - |2a-b| - 5|4a^2 - b + 2|$ **не выполнено.**

Решение.

Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a, при каждом из которых неравенство $20b \geq 6|2a+b| + 2|b-2| - |2a-b| - 5|4a^2 - b + 2|$ выполнено при любом $b > a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b) = 20b - 6|2a+b| - 2|b-2| + |2a-b| + 5|4a^2 - b + 2| \geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \geq 0$, то есть $20a^2 + 15a - 17|a| - 2|a-2| + 10 \geq 0$. Отметим, что при $a \geq 0$ полученное неравенство верно. Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$10a^2 + 17a + 3 \geq 0; \quad \left[\begin{array}{l} -0{,}2 \leq a < 0; \\ a \leq -1{,}5. \end{array}\right.$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $20b \geq 6|2a+b| + 2|b-2| - |2a-b| - 5|4a^2 - b + 2|$ не выполнено.

Ответ: -1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения неравенства	2
Задача верно сведена к исследованию решения неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{8}$, $B=\frac{n}{6}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит, $A-B=\frac{m}{8}-\frac{n}{6}=\frac{3m-4n}{24}$. Если $A-B=\frac{1}{20}$, то $3m-4n=\frac{24}{20}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{20}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+3+4+6+7+8}{8}-\frac{1+2+3+4+6+7}{6}=\frac{31}{8}-\frac{23}{6}=\frac{1}{24}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных шести оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{8}-\frac{y}{6}=\frac{3x-y+3z}{24}\le$$
$$\le\frac{3x+3z-\left(\left(x+1\right)+\left(x+2\right)+\ldots+\left(x+6\right)\right)}{24}=$$
$$=\frac{3z-3x-21}{24}\le\frac{3\cdot 10-3\cdot 0-21}{24}=\frac{3}{8}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 разность $A-B$ равна $\frac{3}{8}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{3}{8}$.

Ответ: а) нет; б) да, например, для оценок 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8; в) $\frac{3}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 7

13

а) Решите уравнение $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $2^{1-\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$. Сделаем замену $y=2^{\cos^2 x}$.

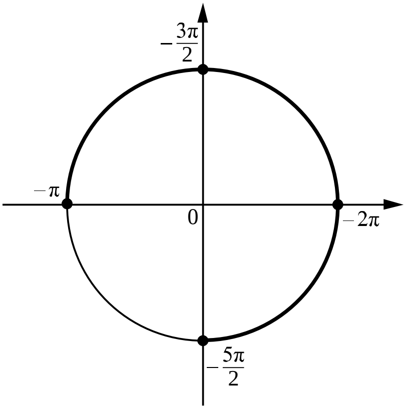
Получаем $\frac{2}{y}+y=3$; $\frac{y^2-3y+2}{y}=0$, откуда $y=1$ или $y=2$.

Сделаем обратную замену:

$$2^{\cos^2 x}=1 \text{ или } 2^{\cos^2 x}=2, \text{ откуда } \cos^2 x=0 \text{ или } \cos^2 x=1.$$

Тогда $\cos x=0$, $\cos x=-1$ или $\cos x=1$, откуда $x=\frac{\pi n}{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$ с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{5\pi}{2}$, -2π, $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\pi$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$; -2π; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\pi$.

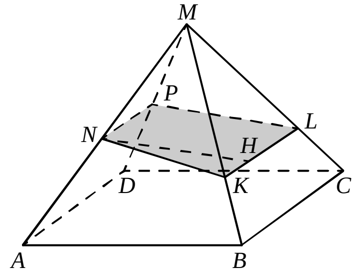
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 12. Точка N — середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении $2:1$, считая от вершины M.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.



а) Через точки N и K проведём прямые, параллельные ребру AD. Эти прямые пересекают рёбра MD и MC в точках P и L соответственно. Четырёхугольник $KLPN$ — сечение пирамиды указанной плоскостью. Стороны NP и KL параллельны и не равны. Следовательно, $KLPN$ — трапеция. В треугольниках NMK и PML углы при вешине M равны, $ML = MK$, $MN = MP$. Следовательно, треугольники равны, и поэтому $NK = PL$. Таким образом, трапеция $KLPN$ равнобедренная.

б) Пусть NH — высота трапеции $KLPN$. Имеем

$$NP = \frac{1}{2}AD = 6,\ KL = \frac{2}{3}BC = 8.$$

Найдём NK из треугольника NMK. Имеем $NM = NP = 6$, $MK = KL = 8$. По теореме косинусов

$$NK^2 = NM^2 + MK^2 - 2NM \cdot MK \cdot \cos\angle NMK = 36 + 64 - 48 = 52.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, $KH = \dfrac{KL - NP}{2} = 1$. По теореме Пифагора из треугольника KHN получаем

$$NH = \sqrt{NK^2 - HK^2} = \sqrt{52 - 1} = \sqrt{51}.$$

Следовательно, площадь трапеции равна

$$\frac{KL+NP}{2}\cdot NH=\frac{8+6}{2}\cdot\sqrt{51}=7\sqrt{51}.$$

Ответ: б) $7\sqrt{51}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $2^{\lg(x^2-4)}\ge(x+2)^{\lg 2}$.

Решение.

Имеем

$$2^{\lg\left(x^2-4\right)}\ge\left(x+2\right)^{\lg 2};\quad \lg 2^{\lg\left(x^2-4\right)}\ge\lg\left(x+2\right)^{\lg 2};$$

$$\lg((x-2)(x+2))\cdot\lg 2\ge\lg 2\cdot\lg(x+2);\quad \lg(x-2)+\lg(x+2)\ge\lg(x+2);$$

$\begin{cases}x-2\ge 1,\\ x+2>0,\end{cases}$ откуда $x\ge 3$.

Ответ: $x\ge 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

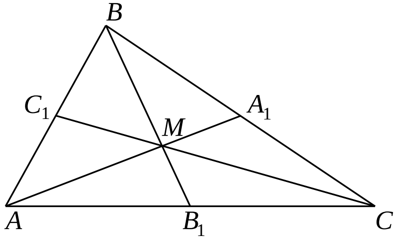
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

Решение.

а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Можно построить окружность с центром B_1 и радиусом $\frac{1}{2}AC$. Вписанный угол ABC опирается на диаметр, поэтому он равен 90°. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный.



б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 180.$$

Ответ: б) 180.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Решение.
Пусть сумма кредита составляет $S = 1\ 342\ 000$ рублей, ежегодные выплаты в случае погашения кредита за 4 года составляют x рублей, а в случае погашения кредита за 2 года — y рублей. По условию долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ \ 1{,}2S-x;\ \ 1{,}2^2S-\left(1{,}2x+x\right);\ \ 1{,}2^3S-\left(1{,}2^2x+1{,}2x+x\right);$$

$$1{,}2^4S-\left(1{,}2^3x+1{,}2^2x+1{,}2x+x\right)=0,$$

откуда $x=\dfrac{1{,}2^4\cdot(1{,}2-1)S}{\left(1{,}2^4-1\right)}=\dfrac{20\ 736\cdot 0{,}2\cdot 1\ 342\ 000}{10\ 736}=518\ 400$ рублей. В этом случае придётся отдать 2 073 600 рублей.
Если отдавать кредит двумя равными платежами, то долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ \ 1{,}2S-y;\ \ 1{,}2^2S-\left(1{,}2y+y\right)=0,$$

откуда $y=\dfrac{1{,}2^2S}{2{,}2}=\dfrac{1{,}44\cdot 1\ 342\ 000}{2{,}2}=878\ 400$ рублей. В этом случае придётся отдать 1 756 800 рублей, то есть на 316 800 рублей меньше, чем в предыдущем случае.
Ответ: 316 800 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Решение системы может быть единственным в двух случаях.

Случай 1. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$x^2+2x-3=0\text{, откуда } x=1 \text{ или } x=-3.$$

Если $x=1$, то $a+2(a+1)+a+1=0$, а значит, $a=-\frac{3}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases}x\le -\frac{13}{7} \text{ или } x\ge 1,\\ -\frac{1}{3}\le x\le 1.\end{cases}$$

Единственное решение: $x=1$.

Если $x=-3$, то $9a-6(a+1)+a+1=0$ и $a=\frac{5}{4}$. Система принимает вид

$$\begin{cases}x^2+10x+21\le 0,\\ 5x^2+18x+9\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}-7\le x\le -3,\\ x\le -3 \text{ или } x\ge -\frac{3}{5};\end{cases}\quad -7\le x\le -3.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

Случай 2. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}a^2-(a-1)(a+4)=0,\\ a>1,\end{cases}\quad \text{откуда } a=\frac{4}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x=-4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}(a+1)^2-a(a+1)=0,\\ a<0,\end{cases}\quad \text{откуда } a=-1.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\frac{3}{4}$, $a=\frac{4}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение.

а) Для чисел $x = 17$ и $y = 12$ выполняется условие $7x = 16y - 73$, $q = 204$, $d = 1$, $\frac{q}{d}=204$.

б) и в) При $x = 1$ и $y = 5$ выполняется равенство $7x = 16y - 73$ и $\frac{q}{d}=5$.

Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d}$, меньшее 5, не реализуется.

Пусть $x = ad$, а $y = bd$, где a и b — натуральные числа с наибольшим общим делителем 1. Тогда $q=\frac{xy}{d}=abd$ и $\frac{q}{d}=ab$.

Если $\frac{q}{d}=1$, то $a = b$, $x=y=\frac{73}{9}$, что невозможно, поскольку x и y — натуральные числа.

Если $\frac{q}{d}=2$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 2$, то есть $y = 2x$, откуда $x = \frac{73}{25}$, что невозможно.

2) $a = 2$, $b = 1$, то есть $x = 2y$, откуда $y = \frac{73}{2}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 3$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 3$, то есть $y = 3x$, откуда $x = \frac{73}{41}$, что невозможно.

2) $a = 3$, $b = 1$, то есть $x = 3y$, откуда $y = -\frac{73}{5}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 4$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 4$, то есть $y = 4x$, откуда $x = \frac{73}{57}$, что невозможно.

2) $a = 4$, $b = 1$, то есть $x = 4y$, откуда $y = -\frac{73}{12}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 8

13

а) Решите уравнение $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

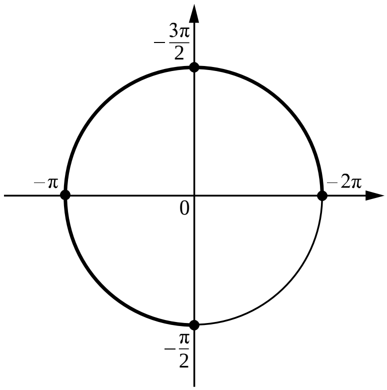
а) Запишем уравнение в виде $3^{1-\cos^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$. Сделаем замену $y = 3^{\cos^2 x}$. Получаем $\frac{3}{y} + y = 4$; $\frac{y^2 - 4y + 3}{y} = 0$, откуда $y = 1$ или $y = 3$.

Сделаем обратную замену:

$$3^{\cos^2 x} = 1 \text{ или } 3^{\cos^2 x} = 3, \text{ откуда } \cos^2 x = 0 \text{ или } \cos^2 x = 1.$$

Тогда $\cos x = 0$, $\cos x = -1$ или $\cos x = 1$, откуда $x = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни на отрезке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью единичной окружности.



Получаем -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$ и $-\frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$ и $-\frac{\pi}{2}$.

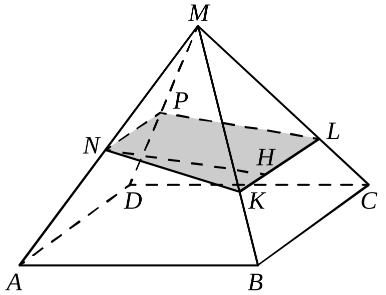
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 6. Точка N — середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении $5:1$, считая от вершины M.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.



а) Через точки N и K проведём прямые, параллельные ребру AD. Эти прямые пересекают рёбра MD и MC в точках P и L соответственно. Четырёхугольник $KLPN$ — сечение пирамиды указанной плоскостью. Стороны NP и KL параллельны и не равны. Следовательно, $KLPN$ — трапеция. В треугольниках NMK и PML углы при вешине M равны, $ML = MK$, $MN = MP$. Следовательно, треугольники равны, и поэтому $NK = PL$. Таким образом, трапеция $KLPN$ равнобедренная.

б) Пусть NH — высота трапеции $KLPN$. Имеем

$$NP = \frac{1}{2}AD = 3,\ KL = \frac{5}{6}BC = 5.$$

Найдём NK из треугольника NMK. Имеем $NM = NP = 3$, $MK = KL = 5$. По теореме косинусов

$$NK^2 = NM^2 + MK^2 - 2NM \cdot MK \cdot \cos\angle NMK = 9 + 25 - 15 = 19.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, $KH = \dfrac{KL - NP}{2} = 1$. По теореме Пифагора из треугольника KHN получаем

$$NH = \sqrt{NK^2 - HK^2} = \sqrt{19 - 1} = 3\sqrt{2}.$$

Следовательно, площадь трапеции равна

$$\frac{KL+NP}{2}\cdot NH=\frac{5+3}{2}\cdot 3\sqrt{2}=12\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $12\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $3^{\lg(x^2-1)}\ge(x+1)^{\lg 3}$.

Решение.

Имеем

$$3^{\lg\left(x^2-1\right)}\ge\left(x+1\right)^{\lg 3};\quad \lg 3^{\lg\left(x^2-1\right)}\ge\lg\left(x+1\right)^{\lg 3};$$

$$\lg((x-1)(x+1))\cdot\lg 3\ge\lg 3\cdot\lg(x+1);\quad \lg(x-1)+\lg(x+1)\ge\lg(x+1);$$

$\begin{cases}x-1\ge 1,\\ x+1>0,\end{cases}$ откуда $x\ge 2$.

Ответ: $x\ge 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

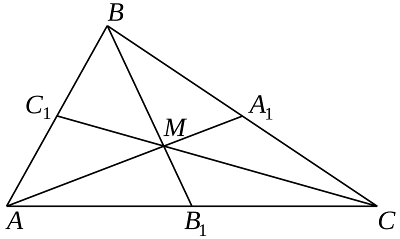
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

Решение.

а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Можно построить окружность с центром B_1 и радиусом $\frac{1}{2}AC$. Вписанный угол ABC опирается на диаметр, поэтому он равен 90°. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный.



б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

Ответ: б) 125.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит на сумму 2 320 500 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Решение.
Пусть сумма кредита составляет $S = 2\,320\,500$ рублей, ежегодные выплаты в случае погашения кредита за 4 года составляют x рублей, а в случае погашения кредита за 2 года — y рублей. По условию долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ \ 1{,}1S - x;\ \ 1{,}1^2 S - (1{,}1x + x);\ \ 1{,}1^3 S - \left(1{,}1^2 x + 1{,}1x + x\right);$$

$$1{,}1^4 S - \left(1{,}1^3 x + 1{,}1^2 x + 1{,}1x + x\right) = 0,$$

откуда $x = \dfrac{1{,}1^4 \cdot (1{,}1 - 1) S}{\left(1{,}1^4 - 1\right)} = \dfrac{14\,641 \cdot 0{,}1 \cdot 2\,320\,500}{4641} = 732\,050$ рублей. В этом случае придётся отдать 2 928 200 рублей.
Если отдавать кредит двумя равными платежами, то долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ \ 1{,}1S - y;\ \ 1{,}1^2 S - (1{,}1y + y) = 0,$$

откуда $y = \dfrac{1{,}1^2 S}{2{,}1} = \dfrac{121 \cdot 2\,320\,500}{210} = 1\,337\,050$ рублей. В этом случае придётся отдать 2 674 100 рублей, то есть на 254 100 рублей меньше, чем в предыдущем случае.
Ответ: 254 100 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5\le 0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2\ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Решение системы может быть единственным в двух случаях.

Случай 1. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5=0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2=0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$x^2-2x-3=0\text{, откуда } x=-1 \text{ или } x=3.$$

Если $x=-1$, то $a+1+2(a+2)+a+2=0$, а значит, $a=-\frac{7}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases} -7x^2+6x+13\le 0, \\ -3x^2-2x+1\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le -1 \text{ или } x\ge \frac{13}{7}, \\ -1\le x\le \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Единственное решение: $x=-1$.

Если $x=3$, то $9(a+1)-6(a+2)+a+2=0$, откуда $a=\frac{1}{4}$. Получаем

$$\begin{cases} x^2-10x+21\le 0, \\ 5x^2-18x+9\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\le x\le 7, \\ x\le \frac{3}{5} \text{ или } x\ge 3, \end{cases} \quad 3\le x\le 7.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

Случай 2. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+1)^2-a(a+5)=0, \\ a>0, \end{cases} \quad \text{откуда } a=\frac{1}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x=4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+2)^2-(a+1)(a+2)=0, \\ a<-1, \end{cases} \quad \text{откуда } a=-2.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\frac{7}{4}$, $a=\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение.

а) Для чисел $x = 17$ и $y = 10$ выполняется условие $3x = 8y - 29$, $q = 170$, $d = 1$, $\frac{q}{d}=170$.

б) и в) При $x=1$ и $y=4$ выполняется равенство $3x=8y-29$ и $\frac{q}{d}=4$.

Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d}$, меньшее 4, не реализуется.

Пусть $x = ad$, а $y = bd$, где a и b — натуральные числа с наибольшим общим делителем 1. Тогда $q=\frac{xy}{d}=abd$ и $\frac{q}{d}=ab$.

Если $\frac{q}{d}=1$, то $a=b$, $x=y=\frac{29}{5}$, что невозможно, поскольку x и y — натуральные числа.

Если $\frac{q}{d}=2$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 2$, то есть $y = 2x$, откуда $x = \frac{29}{13}$, что невозможно.

2) $a = 2$, $b = 1$, то есть $x = 2y$, откуда $y = \frac{29}{2}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 3$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 3$, то есть $y = 3x$, откуда $x = \frac{29}{21}$, что невозможно.

2) $a = 3$, $b = 1$, то есть $x = 3y$, откуда $y = -29$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 9

13

а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

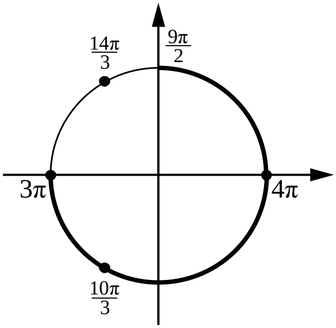
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

<u>Решение.</u>

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x \cdot \cos x = \sin x; \qquad \sin x(1 + 2\cos x) = 0.$$

Получаем $\sin x = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, где $n, k, m \in \mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x = 3\pi$, $x = \frac{10\pi}{3}$ и $x = 4\pi$.

Ответ: а) πn, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) 3π, $\frac{10\pi}{3}$, 4π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

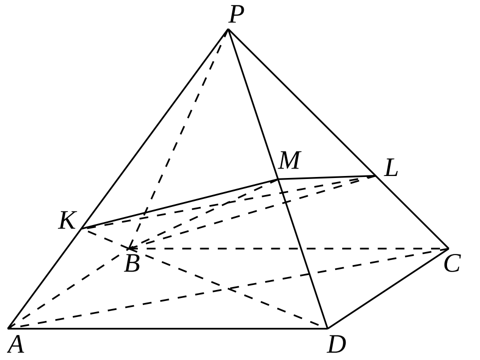
14 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

<u>Решение.</u>

а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60°$, что и требовалось доказать.



б) Из доказанного следует, что $PA = 6\sqrt{2}$ и $BM = 3\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $36 = 144(1 - \cos\angle APD)$, откуда $\cos\angle APD = \frac{3}{4}$.

Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \dfrac{PM}{\cos\angle APD} = 4\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL = 4\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK = 4\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2-x-1\right)\le 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<(x+4)^2<1$; $-5<x<-4$ или $-4<x<-3$. Тогда

$$3x^2-x-1\ge 1;\ (3x+2)(x-1)\ge 0,$$

откуда $x\le -\frac{2}{3}$ или $x\ge 1$.

При $0<(x+4)^2<1$ получаем

$$-5<x<-4 \text{ или } -4<x<-3.$$

Второй случай: $(x+4)^2>1$; $x<-5$ или $x>-3$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2-x-1>0,\\ 3x^2-x-1\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)>0,\\ (3x+2)(x-1)\le 0,\end{cases}$$

откуда $-\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ или $\frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1$.

Найденные решения удовлетворяют условию $(x+4)^2>1$.

Решение исходного неравенства:

$$-5<x<-4;\ -4<x<-3;\ -\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6};\ \frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1.$$

Ответ: $(-5;-4)$; $(-4;-3)$; $\left[-\frac{2}{3};\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6};1\right]$.

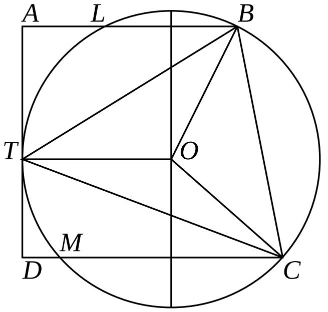
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

Решение.



а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC — соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC = 2\angle BTC$.

б) Из условия касания окружности и стороны AD следует, что прямые OT и AD перпендикулярны. Пусть окружность вторично пересекает сторону AB в точке L и сторону CD — в точке M. Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB, делит каждую из хорд BL и CM пополам. Обозначим $OT = r$, тогда $AL = 2r - AB = 2r - 4$, $DM = 2r - CD = 2r - 9$.

По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 4(2r-4)$. Следовательно,

$$TB^2 = 4(2r-4) + 4^2 = 8r.$$

Аналогично $TC^2 = 18r$

Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin\angle BTC$. Пусть h — искомое расстояние от точки T до прямой BC. Выразим площадь треугольника BTC двумя способами:

$$\frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin\angle BTC.$$

Отсюда получаем, что

$$h \cdot 2r \cdot \sin\angle BTC = \sqrt{8r} \cdot \sqrt{18r} \cdot \sin\angle BTC.$$

Следовательно, $h = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$.

Ответ: 6.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма ежегодного платежа — x рублей, а взятая в кредит сумма составляет a рублей. Получаем уравнение

$$\left(\left(1{,}1a-x\right)\cdot 1{,}1-x\right)\cdot 1{,}1-x=0,$$

откуда

$$1{,}1^3a-\left(1{,}1^2+1{,}1+1\right)x=0;\quad 3x=\frac{3\cdot 1{,}1^3a}{1+1{,}1+1{,}1^2}=\frac{3{,}993a}{3{,}31}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y=\frac{2\cdot 1{,}1^2a}{1+1{,}1}=\frac{2{,}42a}{2{,}1}.$$

Подставляя $a=69\,510$, получаем

$$3x-2y=\frac{3{,}993\cdot 69\,510}{3{,}31}-\frac{2{,}42\cdot 69\,510}{2{,}1}=$$

$$=3{,}993\cdot 21\,000-2{,}42\cdot 33100=83\,853-80\,102=3751.$$

Ответ: 3751 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-2y)(y-2x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=2y$ и $y=2x$.

Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ — уравнение окружности с центром $(a,\,a)$ и радиусом $a^2\sqrt{5}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Если $a\neq 0$, то условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых, то есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности. Получаем уравнение $\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}}=a^2\sqrt{5}$. Отсюда $a=\pm 0{,}2$.

Ответ: $a=\pm 0{,}2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$?

Решение.

а) Пусть $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 2 + 1 = 3$, $a_4 = 1 + 3 = 4$, $a_5 = 3 + 4 = 7$ и $4a_5 = 7a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0$. Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности $3, 8, 11, 19, 30, 49, \ldots$ показывает, что равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$ может выполняться при $n = 5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $30a_6 = 49a_5$.

Пусть $n \geq 6$ и $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{6n} > 0$. Тогда $a_n = 6na$ и $a_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \left(n^2 - 6n + 24\right)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = \left(-n^2 + 12n - 24\right)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = \left(2n^2 - 18n + 48\right)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3\left(n^2 - 10n + 24\right)a.$$

Так как $a_{n-4} > 0$, получаем, что $n^2 - 10n + 24 = (n-4)(n-6) < 0$. Следовательно, $n = 5$. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3

Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 10

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-x)=\sqrt{3}\sin x$.

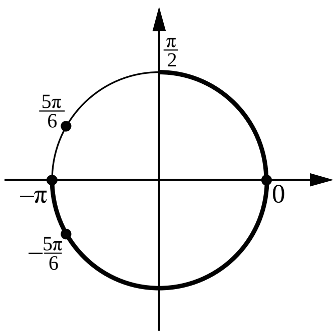
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x\cdot\cos x=\sqrt{3}\sin x; \qquad \sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\right)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, где $n, k, m\in\mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем $x=-\pi$, $x=-\frac{5\pi}{6}$ и $x=0$.

Ответ: а) πn, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, 0.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

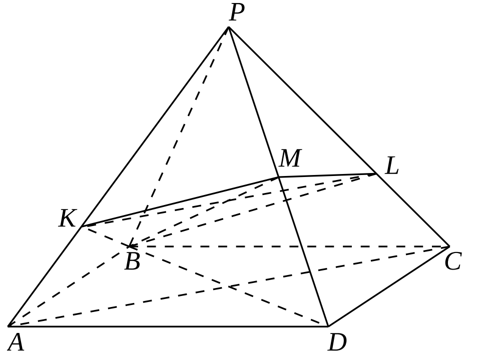
14 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Решение.

а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP=BD$, но, так как $PB=PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD=60°$, что и требовалось доказать.



б) Из доказанного следует, что $PA=9\sqrt{2}$ и $BM=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $81=324(1-\cos\angle APD)$, откуда $\cos\angle APD=\frac{3}{4}$. Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK=\frac{PM}{\cos\angle APD}=6\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL=6\sqrt{2}$. Значит, $PK=PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK=6\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM\cdot KL=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{6}}{2}\cdot 6\sqrt{2}=27\sqrt{3}.$$

Ответ: $27\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2+7x+1\right)\geq 0$.

<u>**Решение.**</u>

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<(x-3)^2<1$; $2<x<3$ или $3<x<4$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2+7x+1>0,\\ 3x^2+7x+1\leq 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x+\frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)>0,\\ (3x+7)x\leq 0;\end{cases}$$

откуда $-\frac{7}{3}\leq x<-\frac{7+\sqrt{37}}{6}$ или $-\frac{7-\sqrt{37}}{6}<x\leq 0$.

Найденные решения не удовлетворяют условию $0<(x-3)^2<1$.

Второй случай: $(x-3)^2>1$; $x<2$ или $x>4$. Тогда

$$3x^2+7x+1\ge 1;\ \ (3x+7)x\ge 0,$$

откуда $x\le -\frac{7}{3}$ или $x\ge 0$.

При $(x-3)^2>1$ получаем

$$x\le -\frac{7}{3},\ \text{или}\ \ 0\le x<2,\ \text{или}\ \ x>4.$$

Решение исходного неравенства:

$$x\le -\frac{7}{3};\ \ 0\le x<2;\ \ x>4.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right]$; $[0;2)$; $(4;+\infty)$.

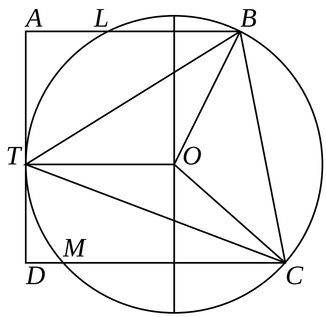
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 1 и 25 соответственно.

<u>Решение.</u>



а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC — соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC=2\angle BTC$.

б) Из условия касания окружности и стороны AD следует, что прямые OT и AD перпендикулярны. Пусть окружность вторично пересекает сторону AB в точке L и сторону CD — в точке M. Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB, делит каждую из хорд BL и CM пополам. Обозначим $OT=r$, тогда $AL=2r-AB=2r-1$, $DM=2r-CD=2r-25$.

По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 2r - 1$. Следовательно,

$$TB^2 = 2r - 1 + 1^2 = 2r.$$

Аналогично $TC^2 = 50r$

Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin\angle BTC$. Пусть h — искомое расстояние от точки T до прямой BC. Выразим площадь треугольника BTC двумя способами:

$$\frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin\angle BTC.$$

Отсюда получаем, что

$$h \cdot 2r \cdot \sin\angle BTC = \sqrt{2r} \cdot \sqrt{50r} \cdot \sin\angle BTC.$$

Следовательно, $h = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма ежегодного платежа — x рублей, а взятая в кредит сумма составляет a рублей. Получаем уравнение

$$\left((1,2a-x)\cdot 1,2-x\right)\cdot 1,2-x=0,$$

откуда

$$1,2^3a-\left(1,2^2+1,2+1\right)x=0;\quad 3x=\frac{3\cdot 1,2^3a}{1+1,2+1,2^2}=\frac{3\cdot 1,728a}{3,64}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y=\frac{2\cdot 1,2^2a}{1+1,2}=\frac{1,44a}{1,1}.$$

Подставляя $a=40\,040$, получаем

$$3x-2y=\frac{3\cdot 1,728\cdot 40\,040}{3,64}-\frac{1,44\cdot 40\,040}{1,1}=$$

$$=5,184\cdot 11\,000-1,44\cdot 36\,400=57\,024-52\,416=4608.$$

Ответ: 4608 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}3x^2+3y^2=10xy,\\(x-a)^2+(y-a)^2=10a^4\end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-3y)(y-3x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=3y$ и $y=3x$.

Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ — уравнение окружности с центром $(a,\,a)$ и радиусом $a^2\sqrt{10}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.
Если $a \neq 0$, то условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых, то есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности. Получаем уравнение $\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}}=a^2\sqrt{10}$. Отсюда $a=\pm 0,2$.

Ответ: $a=\pm 0,2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $5a_5=9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5=7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1}=\left(n^2-1\right)a_n$?

<u>Решение.</u>

а) Пусть $a_1=3$ и $a_2=1$. Тогда $a_3=3+1=4$, $a_4=1+4=5$, $a_5=4+5=9$ и $5a_5=9a_4$.

б) Предположим, что $5a_5=7a_4$. Тогда $a_5=7a$ и $a_4=5a$, где $a=\frac{a_5}{7}>0$. Имеем $a_3=a_5-a_4=2a$, $a_2=a_4-a_3=3a$ и $a_1=a_3-a_2=-a<0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности $3, 3, 6, 9, 15, 24, \ldots$ показывает, что равенство $3na_{n+1}=\left(n^2-1\right)a_n$ может выполняться при $n=5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $15a_6=24a_5$.

Пусть $n \geq 6$ и $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{3n} > 0$. Тогда $a_n = 3na$ и $a_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \left(n^2 - 3n - 1\right)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = \left(-n^2 + 6n + 1\right)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = \left(2n^2 - 9n - 2\right)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3\left(n^2 - 5n - 1\right)a.$$

Так как $a_{n-4} > 0$, получаем, что $n^2 - 5n - 1 < 0$. При $n \geq 6$ это неравенство не выполнено. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 11

13 а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 3\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение.

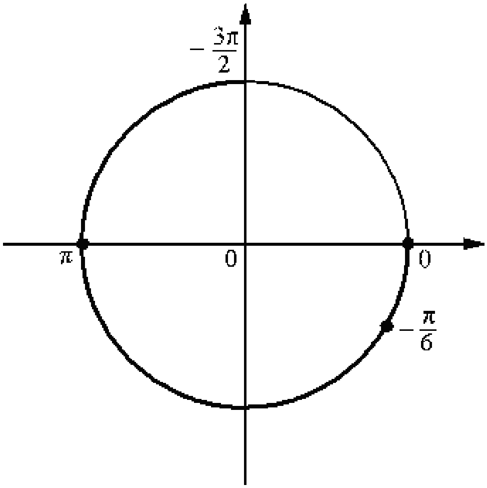
а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x \cos\frac{7\pi}{6} + 2\sqrt{3}\sin x \sin\frac{7\pi}{6} = 3\cos x;$$

$$2\sin x\cos x + 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 3\cos x; \quad \sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$. Получим числа $-\pi$; $-\frac{\pi}{6}$; 0.



Ответ: а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$; $-\frac{\pi}{6}$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

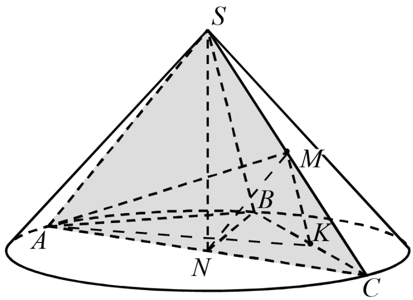
а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

Решение.

а) Поскольку медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса, плоскость ACS содержит высоту конуса. Значит, AC — диаметр основания конуса и SN — его высота.

Медиана BN треугольника ABC перпендикулярна прямой AC. Также отрезок BN перпендикулярен высоте конуса SN как радиус основания. Следовательно, прямая BN перпендикулярна плоскости ACS, а значит, угол MNB прямой.



б) Пусть K — середина отрезка BC, $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$. Тогда искомый угол будет равен углу AMK, поскольку средняя линия MK треугольника BCS параллельна прямой SB; $MK = \frac{SB}{2} = 1$.

В треугольнике ACS медиана AM равна

$$\frac{\sqrt{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}}{2} = \frac{\sqrt{AS^2 + 2AC^2}}{2} = 2.$$

В прямоугольном треугольнике ABC имеем

$$AB=\sqrt{3},\ BK=\frac{\sqrt{3}}{2};\ AK=\sqrt{AB^2+BK^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

По теореме косинусов в треугольнике AMK имеем

$$\cos\angle AMK=\frac{AM^2+MK^2-AK^2}{2\cdot AM\cdot MK}=\frac{5}{16};\quad \angle AMK=\arccos\frac{5}{16}.$$

Ответ: $\arccos\frac{5}{16}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{10^x-2\cdot5^x-25\cdot2^x+50}{\sqrt{x+3}}\ge0$.

<u>**Решение.**</u>

Преобразуем неравенство:

$$\frac{10^x-2\cdot5^x-25\cdot2^x+50}{\sqrt{x+3}}\ge0;$$

$$\frac{\left(5^x-25\right)\left(2^x-2\right)}{\sqrt{x+3}}\ge0.$$

Получаем $-3<x\le1$ и $x\ge2$.

Ответ: $(-3;\ 1],\ [2;\ \infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если угол CDB вдвое меньше угла ADB.

<u>**Решение.**</u>

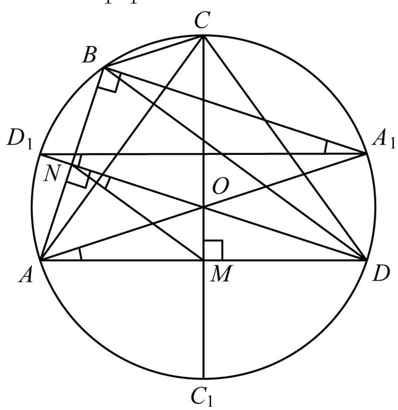
а) Точка B лежит на окружности с диаметром AA_1, поэтому прямая A_1B перпендикулярна прямой AB, а так как прямая DD_1 перпендикулярна прямой AB, прямая A_1B параллельна прямой DD_1, поэтому $\angle BA_1D_1 = \angle A_1D_1D$ как накрест лежащие.

Вписанные углы A_1D_1D и A_1AD опираются на одну и ту же дугу, значит, $\angle BA_1D_1 = \angle A_1D_1D = \angle A_1AD$.

Пусть O — центр окружности. Из точек M и N отрезок OA виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром OA. Вписанные в эту окружность углы MAO и MNO опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle DNM = \angle MNO = \angle OAM = \angle A_1AD.$$

Следовательно, $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.



б) Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, треугольники ACD и ABD равнобедренные (их высоты являются медианами). Положим $\angle CDB = \alpha$, $\angle ADB = 2\alpha$. Тогда

$$\angle BAD = \angle ABD = \angle ACD = 180° - 2\angle ADC = 180° - 6\alpha.$$

С другой стороны, $\angle BAD = \dfrac{1}{2}\left(180° - \angle ADB\right) = 90° - \alpha$,

Из равенства $180° - 6\alpha = 90° - \alpha$ находим, что $\alpha = 18°$. Следовательно,

$$\angle ADC = 3\alpha = 54°,$$

$$\angle ABC = 180° - \angle ADC = 126°, \angle BAD = 90° - \alpha = 72°,$$

$$\angle BCD = 180° - \angle BAD = 108°.$$

Ответ: $72°, 126°, 108°, 54°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 2 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 327 тысяч рублей.

Решение.

Заметим, что долг перед банком по состоянию на февраль будет составлять $1{,}02S;\ 1{,}02\cdot 0{,}9S;\ 1{,}02\cdot 0{,}8S;\ 1{,}02\cdot 0{,}7S;\ 1{,}02\cdot 0{,}6S;\ 1{,}02\cdot 0{,}5S$ тыс. рублей.

Найдём размеры ежегодных выплат:

$1{,}02S-0{,}9S$;

$1{,}02\cdot 0{,}9S-0{,}8S$;

$1{,}02\cdot 0{,}8S-0{,}7S$;

$1{,}02\cdot 0{,}7S-0{,}6S$;

$1{,}02\cdot 0{,}6S-0{,}5S$;

$1{,}02\cdot 0{,}5S$.

Общая сумма выплат составит

$1{,}02S\left(1+0{,}9+\ldots+0{,}5\right)-S\left(0{,}9+0{,}8+\ldots+0{,}5\right)=4{,}59S-3{,}5S=1{,}09S=327$ (тыс. рублей).

Значит, $S=327:1{,}09=300$ (тыс. рублей).

Ответ: 300 тыс. рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-1)^2+(y-4)^2\right)\left((x-6)^2+(y-4)^2\right)\le 0,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2\le 4a^2\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Первое неравенство имеет ровно два решения: $(1;\,4),\,(6;\,4)$. Следовательно, данная система имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда второму неравенству удовлетворяет только одно из решений первого неравенства.

Найдём все значения a, при которых справедлива каждая из систем:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2\le 4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2>4a^2\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2>4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2\le 4a^2.\end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2\le 4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2>4a^2;\end{cases}\quad \begin{cases}(a-1)(a-17)\le 0,\\(a-2)(a-26)>0.\end{cases}$$

Получаем $1\le a<2$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2>4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2\le 4a^2;\end{cases}\quad \begin{cases}(a-1)(a-17)>0,\\(a-2)(a-26)\le 0.\end{cases}$$

Получаем $17<a\le 26$.

Ответ: $[1;2)$; $(17;\,26]$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию возможных значений корней системы уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 23$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 23$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 83$?

<u>Решение.</u>

а) Такое число существует. Например, при $n = 16$ имеем $S(n) = 7$ и $K(n) = 37 = 2\cdot 7 + 23$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n) = 3S(n) + 23$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n) = 3S(n) + 23$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит, $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n. Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна $S(n)-9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n)-9m)$. Значит, $8S(n) + 83 = K(n) \le 81m + 8(S(n) - 9m) = 8S(n) + 9m$. Следовательно, $m \ge 10$.

Поскольку искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n) = 8S(n) + 83$, среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть) и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n) = 8S(n) + 83$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n \geq 19\,999\,999\,999$. При этом $K(19\,999\,999\,999) = 811 = 8 \cdot 91 + 83 = 8S(19\,999\,999\,999) + 83$. Значит, число $n = 19\,999\,999\,999$ и есть искомое.

Ответ: а) да; б) нет; в) 19 999 999 999.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 12

13 а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.

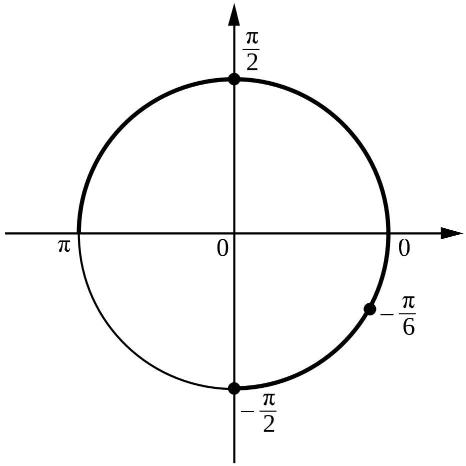
а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\sin 2x - 2\cos x\cos\frac{4\pi}{3} - 2\sin x\sin\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}\sin x;$$

$$2\sin x\cos x + \cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\sin x = 0; \quad \cos x(2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Получим числа $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

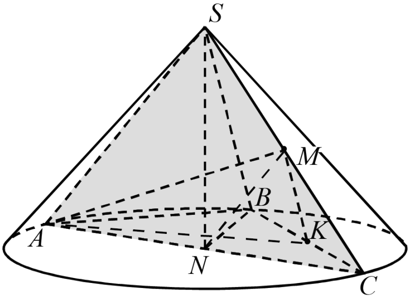
а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{10}$.

Решение.

а) Поскольку медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса, плоскость ACS содержит высоту конуса. Значит, AC — диаметр основания конуса и SN — его высота.

Медиана BN треугольника ABC перпендикулярна прямой AC. Также отрезок BN перпендикулярен высоте конуса SN как радиус основания. Следовательно, прямая BN перпендикулярна плоскости ACS, а значит, угол MNB прямой.



б) Пусть K — середина отрезка BC, $AC = \sqrt{10}$, $AS = 2$. Тогда искомый угол будет равен углу AMK, поскольку средняя линия MK треугольника BSC параллельна прямой SB; $MK = \frac{SB}{2} = 1$.

В треугольнике ACS медиана AM равна

$$\frac{\sqrt{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}}{2} = \frac{\sqrt{AS^2 + 2AC^2}}{2} = \sqrt{6}.$$

В прямоугольном треугольнике ABC имеем

$$AB=\sqrt{5},\ BK=\frac{\sqrt{5}}{2};\ AK=\sqrt{AB^2+BK^2}=\frac{5}{2}.$$

По теореме косинусов в треугольнике AMK имеем

$$\cos\angle AMK=\frac{AM^2+MK^2-AK^2}{2\cdot AM\cdot MK}=\frac{\sqrt{6}}{16};\quad \angle AMK=\arccos\frac{\sqrt{6}}{16}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{6}}{16}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{2\cdot 14^x-14\cdot 2^x-7^x+7}{\sqrt{x+5}}\ge 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{2\cdot 14^x-14\cdot 2^x-7^x+7}{\sqrt{x+5}}\ge 0;$$

$$\frac{\left(7^x-7\right)\left(2^{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+5}}\ge 0.$$

Получаем $-5<x\le -1$ и $x\ge 1$.

Ответ: $(-5;\ -1],\ [1;\ \infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.

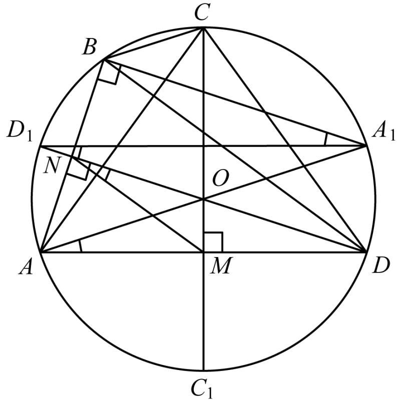
а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle A_1D_1D$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если $\angle CDB : \angle ADB = 3:8$.

Решение.

а) Вписанные углы A_1D_1D и A_1AD опираются на одну и ту же дугу, значит, $\angle A_1AD = \angle A_1D_1D$.

Пусть O — центр окружности. Из точек M и N отрезок OA виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром OA. Вписанные в эту окружность углы MAO и MNO опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle DNM = \angle OAM = \angle A_1AD = \angle A_1D_1D$.



б) Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, треугольники ACD и ABD равнобедренные (их высоты являются медианами). Положим $\angle CDB = 3\alpha$, $\angle ADB = 8\alpha$. Тогда

$$\angle BAD = \angle ABD = \angle ACD = 180° - 2\angle ADC = 180° - 22\alpha.$$

С другой стороны, $\angle BAD = \frac{1}{2}\left(180° - \angle ADB\right) = 90° - 4\alpha$,

Из равенства $180° - 22\alpha = 90° - 4\alpha$ находим, что $\alpha = 5°$. Следовательно,

$$\angle ADC = 11\alpha = 55°, \quad \angle ABC = 180° - \angle ADC = 125°,$$

$$\angle BAD = 90° - 4\alpha = 70°, \angle BCD = 180° - \angle BAD = 110°.$$

Ответ: $70°, 125°, 110°, 55°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 1 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 836 тысяч рублей.

Решение.

Заметим, что долг перед банком по состоянию на февраль будет составлять

$1{,}01S$; $1{,}01\cdot 0{,}9S$; $1{,}01\cdot 0{,}8S$; $1{,}01\cdot 0{,}7S$; $1{,}01\cdot 0{,}6S$; $1{,}01\cdot 0{,}5S$ тыс. рублей.

Найдём размеры ежегодных выплат:

$1{,}01S-0{,}9S$;

$1{,}01\cdot 0{,}9S-0{,}8S$;

$1{,}01\cdot 0{,}8S-0{,}7S$;

$1{,}01\cdot 0{,}7S-0{,}6S$;

$1{,}01\cdot 0{,}6S-0{,}5S$;

$1{,}01\cdot 0{,}5S$.

Общая сумма выплат составит

$1{,}01S\left(1+0{,}9+\ldots+0{,}5\right)-S\left(0{,}9+0{,}8+\ldots+0{,}5\right)=4{,}545S-3{,}5S=1{,}045S=836$ (тыс. рублей).

Значит, $S=836:1{,}045=800$ (тыс. рублей).

Ответ: 800 тыс. рублей.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-2)^2+(y-3)^2\right)\left((x-8)^2+(y-2)^2\right)\le 0,\\ (x-2a)^2+(y-a)^2\le 4a^2\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

<u>Решение.</u>

Первое неравенство имеет ровно два решения: $(2;3),(8;2)$. Следовательно, данная система имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда второму неравенству удовлетворяет только одно из решений первого неравенства.

Найдём все значения a, при которых справедлива каждая из систем:

$$\begin{cases}(2-2a)^2+(3-a)^2\le 4a^2,\\ (8-2a)^2+(2-a)^2>4a^2\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(2-2a)^2+(3-a)^2>4a^2,\\ (8-2a)^2+(2-a)^2\le 4a^2.\end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases}(2-2a)^2+(3-a)^2\le 4a^2,\\ (8-2a)^2+(2-a)^2>4a^2;\end{cases} \quad \begin{cases}(a-1)(a-13)\le 0,\\ (a-2)(a-34)>0.\end{cases}$$

Получаем $1\le a<2$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases}(2-2a)^2+(3-a)^2>4a^2,\\ (8-2a)^2+(2-a)^2\le 4a^2;\end{cases} \quad \begin{cases}(a-1)(a-13)>0,\\ (a-2)(a-34)\le 0.\end{cases}$$

Получаем $13<a\le 34$.

Ответ: $[1;2)$; $(13;34]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию возможных значений корней системы уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 11$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 11$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 74$?

Решение.

а) Такое число существует. Например, при $n = 34$ имеем $S(n) = 7$ и $K(n) = 25 = 2 \cdot 7 + 11$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n) = 3S(n) + 11$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n) = 3S(n) + 11$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит, $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n. Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна $S(n) - 9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n) - 9m)$. Значит, $8S(n) + 74 = K(n) \le 81m + 8(S(n) - 9m) = 8S(n) + 9m$. Следовательно, $m \ge 9$.

Поскольку искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n) = 8S(n) + 74$, среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть) и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n) = 8S(n) + 74$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n \ge 1\,999\,999\,999$. При этом $K(1\,999\,999\,999) = 730 = 8 \cdot 82 + 74 = 8S(1\,999\,999\,999) + 74$. Значит, число $n = 1\,999\,999\,999$ и есть искомое.

Ответ: а) да; б) нет; в) 1 999 999 999.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Оглавление

Предисловие ... 3
Инструкция по выполнению работы ... 4
Вариант 1 ... 5
Вариант 2 ... 10
Вариант 3 ... 15
Вариант 4 ... 20
Вариант 5 ... 25
Вариант 6 ... 30
Вариант 7 ... 35
Вариант 8 ... 41
Вариант 9 ... 46
Вариант 10 ... 51
Вариант 11 ... 55
Вариант 12 ... 60
Справочные материалы ... 65
Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень) ... 65
Ответы к заданиям ... 65
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом ... 67
- Вариант 1 ... 67
- Вариант 2 ... 74
- Вариант 3 ... 82
- Вариант 4 ... 89
- Вариант 5 ... 97
- Вариант 6 ... 104
- Вариант 7 ... 113
- Вариант 8 ... 121
- Вариант 9 ... 128
- Вариант 10 ... 136
- Вариант 11 ... 144
- Вариант 12 ... 152