

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ №26 ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (9 КЛАСС).

Последнее 26-е задание ОГЭ по математике - планиметрическая задача на вычисление, более сложная по сравнению с задачей 24. Последнюю можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для её решения, используются и при решении задания 26.

Рассмотрим типичные примеры с решениями задания №26.

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Пример 1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC .

Решение. Пусть P – точка пересечения отрезков BE и AD (рис. 1).

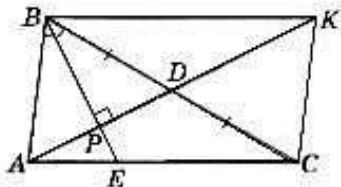


Рис. 1

Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому $AP = PD = 6$, $BC = 2BD = 2AB$.

По свойству биссектрисы треугольника ABC

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2,$$

Откуда $AC = 3AE$.

Проведем через вершину B прямую, параллельную AC . Пусть K – точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD .

Тогда $BK = AC = 3AE$.

Из подобия прямоугольных треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $PE = 3$ и $BP = 9$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AP^2 + BP^2} = 3\sqrt{13}, & BC &= 2AB = 6\sqrt{13} \\ AE &= \sqrt{AP^2 + EP^2} = 3\sqrt{5}, & AC &= 3AE = 9\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ответ: $3\sqrt{13}$, $6\sqrt{13}$, $9\sqrt{5}$.

Пример 2. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P .

Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$.

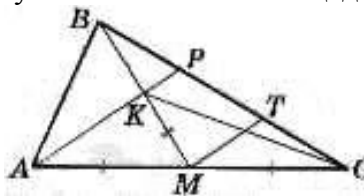


Рис. 2

Решение. Проведем прямую MT параллельно стороне AP . Тогда MT – средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP – средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда площадь треугольника KPC , имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна $2S$, значит, площадь треугольника CBK равна $3S$ и равна площади треугольника CMK , которая, в свою очередь, равна площади треугольника AMK . Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK .

Итак,

$$\begin{aligned} S_{BKP} &= S, S_{KPC} = 2S, \\ S_{CMK} &= 3S = S_{AMK} = S_{ABK} \quad S_{KPCM} = 5S. \end{aligned}$$

Значит

$$S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5.$$

Ответ: $3 : 5$.

Пример 3. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC втрое больше длины стороны AB . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC (рис. 3).

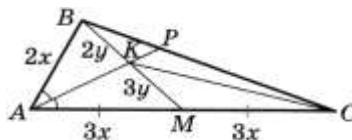


Рис. 3

Решение. Пусть $AM = MC = 3x$,

Тогда $AB = 2x$.

Так как AK – биссектриса треугольника ABM , то $BP : PC = AB : AC = 1 : 3$.

Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда площадь треугольника KPC , имеющего ту же высоту и втрое большее основание, равна $3S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $4S$, а площадь треугольника CMK равна $6S$ и равна площади треугольника AMK . Тогда площадь треугольника ABK равна $4S$. Итак,

$$S_{BKP} = S, S_{KPC} = 3S, \\ S_{CMK} = 6S = S_{AMK}, S_{ABK} = 4S.$$

Значит,

$$S_{ABK} : S_{ABC} = 4S : 20S = 1 : 5.$$

Ответ: $1 : 5$.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Пример 4. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.

Решение. Пусть KH , KN и KM – перпендикуляры, опущенные из точки K к сторонам AB , BC и AD соответственно (рис. 4).

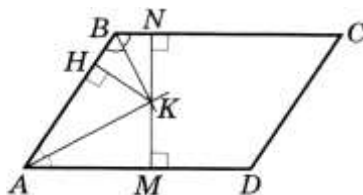


Рис. 4

Тогда $KM = KH = KN = 7$. Кроме того, точки M , K и N лежат на одной прямой, а высота MN параллелограмма $ABCD$ равна $MK + KN = 14$.

По формуле площади параллелограмма находим $S_{ABCD} = BC \cdot MN = 19 \cdot 14 = 266$.

Ответ: 266.

Пример 5. Углы при одном из оснований трапеции равны 77° и 13° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны соответственно 11 и 10. Найдите длины оснований трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, AD – большее основание, K и L – середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна

$$77^\circ + 13^\circ = 90^\circ,$$

так что это большее основание AD . Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (рис. 5).

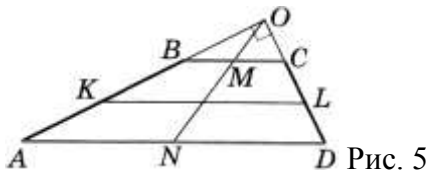


Рис. 5

Легко видеть, что

$$\angle AOD = 180^\circ - (77^\circ + 13^\circ) = 90^\circ$$

Пусть N – середина основания AD . Тогда

$$ON = \frac{AD}{2}$$

– медиана прямоугольного треугольника AOD . Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD и параллельный стороне AD , она пересекает основание BC также в его середине M . Значит,

$$OM = \frac{BC}{2}.$$

Таким образом, $MN = \frac{AD-BC}{2}$.

Средняя линия трапеции при этом равна $KL = \frac{AD+BC}{2}$.

Получаем:

$$AD = MN + KL = 11 + 10 = 21,$$

$$BC = KL - MN = 11 - 10 = 1.$$

Ответ: 21; 1.

Пример 6. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть M – середина стороны AB (рис. 6).

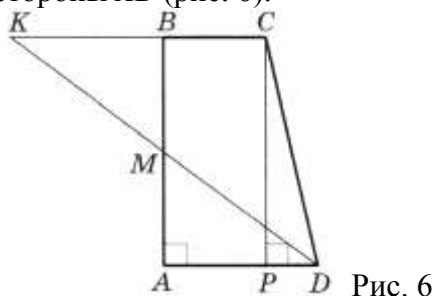


Рис. 6

Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K . Поскольку $\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK$,

треугольник KCD равнобедренный, $KC = CD = 41$,

тогда $KB = KC - BC = 41 - 16 = 25$.

Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что

$$AD = BK = 25.$$

Проведем через вершину C прямую, параллельную стороне AB , до пересечения с основанием AD в точке P , тогда

$$PD = AD - AP = 25 - 16 = 9.$$

Треугольник CPD прямоугольный, так как

$$CD^2 = 41^2 = 40^2 + 9^2 = DC^2 + PD^2$$

Поэтому CP – высота трапеции. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CP = 820.$$

Ответ: 820.

ОКРУЖНОСТИ

Пример 7. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 84$, $AC = 98$, точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите длину отрезка CD .

Решение. Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке P (рис. 7).

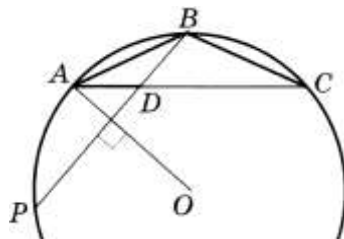


Рис. 7

Тогда хорда BP перпендикулярна радиусу OA этой окружности. Значит, точка A – середина дуги BP , не содержащей вершину C . Отсюда следует, что

$$\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$$

как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A – общий). Следовательно

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

откуда

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = 72.$$

$$CD = AC - AD = 98 - 72 = 26.$$

Ответ: 26.

Пример 8. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B , в отношении $5 : 3$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 8$.

Решение. Пусть BH – высота треугольника, которую биссектриса пересекает в точке O (рис. 8).

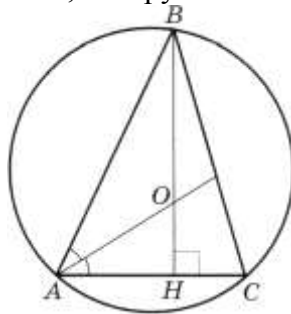


Рис. 8

По теореме о биссектрисе в треугольнике ABH имеем:

$$\frac{BA}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}.$$

Следовательно, $\cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}$.

Тогда $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

По теореме синусов для треугольника ABC искомый радиус равен

$$\frac{BC}{2\sin A} = \frac{8 \cdot 5}{2 \cdot 4} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 9. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 49$, $MD = 42$, H – точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите длину отрезка AH .

Решение. Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (рис. 10).

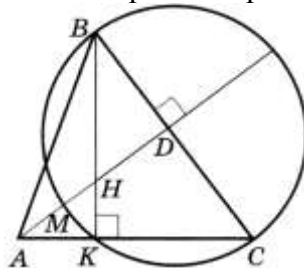


Рис. 9

Поскольку BK – высота остроугольного треугольника ABC , то точка K лежит на стороне AC , а точка H лежит на отрезке BK .

Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q . Тогда

$$DQ = MD = 42.$$

По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 7 \cdot 91 = 637.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

откуда

$$AK \cdot AC = AD \cdot AH = 49AH.$$

Значит,

$$49AH = 637, AH = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 10. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках M , L и K соответственно (рис. 11), H – проекция точки O на прямую AD (точка H может лежать либо на стороне AD , либо на ее продолжении).

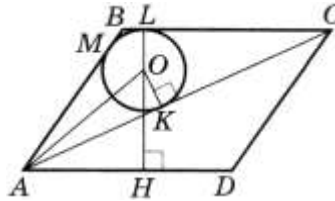


Рис. 10

Тогда $OL = OK = 3$,

Точки O , L и H лежат на одной прямой, HL – высота параллелограмма $ABCD$.

$$HL = OL + OH = 3 + 4 = 7.$$

Из прямоугольного треугольника AOK находим, что $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = 4$.

Пусть p и S – полупериметр и площадь треугольника ABC , $r = 3$ – радиус окружности, вписанной в него. Обозначим $BC = x$. Тогда

$$p = AK + CL + BM = AK + CL + BL = AK + BC = 4 + x,$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot HL = \frac{1}{2} x \cdot 7 = 3,5x,$$

$$S = p \cdot r = 3(4 + x).$$

Из уравнения $3,5x = 3(4 + x)$

находим, что $BC = x = 24$.

Следовательно, $S_{ABCD} = 2S = 2pr = 168$.

Ответ: 168.

Пример 11. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 14$, $BC = 12$.

Решение. Пусть T – точка пересечения прямых AB и CD , P – проекция точки E на прямую CD , Q – проекция точки C на прямую AD (рис. 11)

Обозначим $CD = x$. Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 2$, из подобия прямоугольных треугольников TBC и CQD находим, что $TC = 6x$.

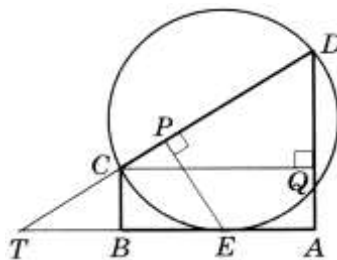


Рис. 11

По теореме о касательной и секущей $TE^2 = TD \cdot TC = 42x^2$

Из подобия прямоугольных треугольников TPE и TBC имеем:

$$EP = \frac{BC \cdot TE}{TC} = \frac{12 \cdot x\sqrt{42}}{6x} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.

Пример 12. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 20$.

Решение. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P (рис. 12).

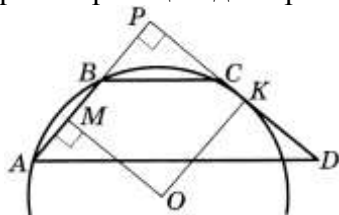


Рис. 12

Из условия следует, что $\angle APD = 90^\circ$. Из подобия треугольников APD и BPC получаем, что

$$\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}, \frac{BP}{BP + 20} = \frac{21}{49}, BP = 15.$$

Пусть окружность касается прямой CD в точке K , а O – ее центр. Опустим перпендикуляр OM на хорду AB . Точка M – середина AB . Так как $OMPK$ – прямоугольник, находим радиус:

$$OK = MP = BP + \frac{1}{2}AB = 15 + 10 = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 13. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

Решение. Пусть BC – меньшее основание, AB – боковая сторона, AD – большее основание трапеции $ABCD$, M – точка касания окружности со стороной AB , N – со стороной BC , Q – точка пересечения диагоналей, O – центр окружности, r – ее радиус (рис. 13).

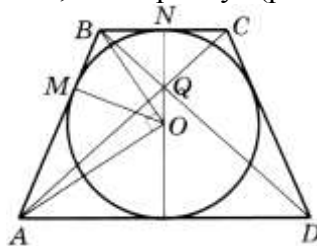


Рис.13

Поскольку трапеция описана около окружности, то сумма ее боковых сторон равна сумме оснований, то есть 60, поэтому

$$S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD + BC}{2} = 60r.$$

Значит, $r = 9$.

Прямые AD и BC параллельны. Значит,

$$\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$$

Поскольку лучи AO и BO – биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем:

$$\angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$$

Значит, треугольник AOB прямоугольный, а OM – его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому:

$$AM \cdot MB = OM^2 = r^2, AM(AB - AM) = r^2, AM(30 - AM) = 81.$$

Учитывая, что $AM > BM$, из последнего уравнения находим, что $AM = 27$. Тогда

$$AD = 54, BC = 6.$$

Треугольник AQD подобен треугольнику CQB с коэффициентом подобия 9, значит, высота QN треугольника BQC составляет $\frac{1}{10}$ высоты трапеции, то есть равна диаметру вписанной в нее окружности. Следовательно,

$$QN = \frac{1}{10} \cdot 18 = 1,8.$$

Ответ: 1,8.

Пример 14. Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 10$, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 112° и 113° .

Решение. Условие задачи означает, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром M , а AD – ее диаметр (рис. 14).

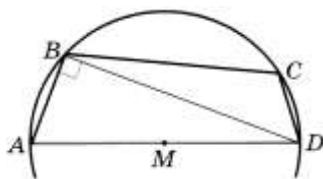


Рис.14

Так как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° , получаем, что $\angle DAB = 67^\circ$ и $\angle ADC = 68^\circ$. Угол ABD прямой, так как опирается на диаметр, поэтому

$$\angle ADB = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ,$$

откуда

$$\angle CDB = 68^\circ - 23^\circ = 45^\circ.$$

По теореме синусов для треугольника CDB :

$$AD = \frac{BC}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}$$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Пример 15. Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причем $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

Решение. Через точку B проведем хорду BM , параллельную диагонали AC (рис. 15).

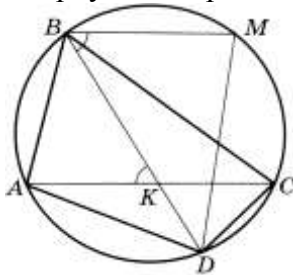


Рис.15

Тогда

$$CM = AB = 25, \angle DBM = \angle AKB = 60^\circ.$$

Четырехугольник $BMCD$ вписанный:

$$\angle DCM = 180^\circ - \angle DBM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

По теореме косинусов

$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CD \cos \angle DCM} = \sqrt{1281}.$$

По теореме синусов радиус окружности равен

$$\frac{DM}{2 \sin \angle DBM} = \frac{\sqrt{1281}}{\sqrt{3}} = \sqrt{427}.$$

Ответ: $\sqrt{427}$.

Пример 16. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP , равен 8 см, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC .

Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC , BCP и ACP через r , r_1 , и r_2 , соответственно (рис. 16).

Треугольники ABC , CBP и ACP подобны по двум углам. Поэтому отношение сходственных элементов любых двух из этих треугольников равно соответствующему коэффициенту подобия, то есть отношению сходственных сторон.

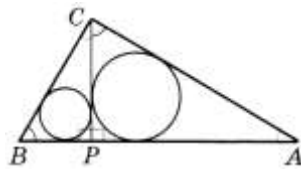


Рис. 16

Значит,

$$\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB}, \frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB}, \frac{r_1}{r_2} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}.$$

Возведя в квадрат и почленно сложив два первых равенства, получим:

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1, r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Но

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}, r_2 = \frac{3}{4} r_1 = 6.$$

Тогда

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ см.}$$

Ответ: 10 см.

Пример 17. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D – на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

Решение. Пусть O и O_1 – центры первой и второй окружностей соответственно (рис. 17).

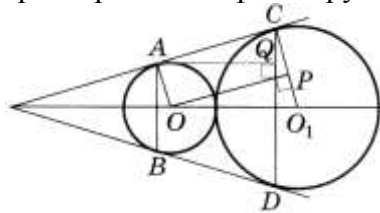


Рис. 17

Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 125.

Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 100 - 25 = 75.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что $OP^2 = 10\,000$, а так как четырехугольник $AOPC$ – прямоугольник, то $AC = OP$.

Опустим перпендикуляр AQ из точки A на прямую CD , тогда

$$\angle O_1OP = 90^\circ - \angle OO_1P = \angle O_1CD = 90^\circ - \angle ACQ = \angle CAQ$$

Прямоугольные треугольники AQC и OPO_1 , подобны по острому углу, поэтому

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{OP}{OO_1}.$$

Следовательно,

$$AQ = \frac{OP \cdot AC}{OO_1} = \frac{OP^2}{OO_1} = 80.$$

Ответ: 80.